第一章　复数及平面点集

1．计算：

（1）$(1+i)\pm(1-2i)$（并作图）；

（2）$\dfrac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}$；

（3）$\sqrt{2}(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

其中：$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\alpha=\mathrm{arc\ tg}2$，$\beta=\mathrm{arc\ tg}3$。

解：（1）$(1+i)+(1-2i)=2-i$；

$(1+i)-(1-2i)=3i$（图1.1）。

（2）$$\frac{i}{(i-1)(i-2)(i-3)}=\frac{-i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$$

$$=\frac{-i(1+i)(2+i)(3+i)}{(1+1)(2^2+1)(3^2+1)}$$

$$=\frac{-10i^2}{100}=\frac{1}{10}.$$

（3）$\because\ \mathrm{tg}\,\alpha=2$，$\mathrm{tg}\,\beta=3$；

$\therefore\ \mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{2+3}{1-2\cdot3}=-1$。

（图1.1）

又　$0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$　　$\therefore$　$\alpha+\beta=\dfrac{3}{4}\pi$，从而

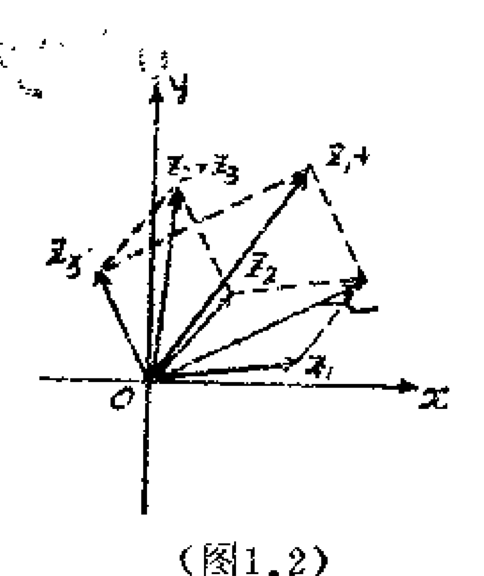
$$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故　原式$=\sqrt{2}[\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)]=-1+i$。

2. 证明：

（1）$z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$（并作图）；

（2）$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$。



（图1.2）

证：（1）设

$z_k=x_k+iy_k$ $(k=1,2,3)$.

$$
\begin{aligned}
\text{左端}&=(x_1+iy_1)+[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)]\\
&=(x_1+iy_1)+[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)]\\
&=[x_1+(x_2+x_3)]+i[y_1+(y_2+y_3)]\\
&=[(x_1+x_2)+x_3]+i[(y_1+y_2)+y_3]\\
&=[(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)]+(x_3+iy_3)\\
&=(z_1+z_2)+z_3.
\end{aligned}
$$

所以原等式成立（图1.2）．

（2）假设同（1）．

$$
\begin{aligned}
\text{左端}&=(x_1+iy_1)[(x_2+iy_2)+(x_3+iy_3)]\\
&=(x_1+iy_1)[(x_2+x_3)+i(y_2+y_3)]\\
&=[x_1(x_2+x_3)-y_1(y_2+y_3)]+i[x_1(y_2+y_3)+y_1(x_2+x_3)]\\
&=[(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1x_3-y_1y_3)]+\\
&\quad+i[(x_1y_2+y_1x_2)+(x_1y_3+y_1x_3)]\\
&=[(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+y_1x_2)]+\\
&\quad+[(x_1x_3-y_1y_3)+i(x_1y_3+y_1x_3)]\\
&=z_1z_2+z_1z_3
\end{aligned}
$$

所以原等式成立。

证明：（i）当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，复数 z 为实数。

）设 z_1 及 z_2 是两复数，如果 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是实

z_1 和 z_2 或者都是实数，或者是一对共轭复数。

（1）设 $z=x+iy$　则 $\bar{z}=x-iy$

若 $z=\bar{z}$　则 $x+iy=x-iy$

故有　$y=-y$　即 $y=0$，　$\therefore z$ 为实数。

反之，若 z 为实数，则 $y=0$，故有 $z=\bar{z}$。

（2）设 $z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$。

若 z_1z_2 和 z_1+z_2 都是实数，则有

$$x_1y_2+x_2y_1=0 \quad \text{及} \quad y_1+y_2=0 \qquad (1)$$

当 $y_1=0$ 时，那么 $y_2=0$，故 z_1,z_2 都是实数；

当 $y_1\neq 0$ 时，则由（1）可得 $x_1=x_2$，$-y_1=y_2$，

$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_1-iy_1$。

故 z_1，z_2 为一对共轭复数。

求复数 $\dfrac{z-1}{z+1}$ 的实部及虚部。

解：设　$z=x+iy$，

$$\text{则}\quad \frac{z-1}{z+1}=\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}=\frac{x^2+y^2-1+i2y}{(x+1)^2+y^2}$$

$$\operatorname{Re}\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},\ \operatorname{Im}\frac{z-1}{z+1}=\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}.$$

5．设 z_1 及 z_2 是两复数，求证：

（1）$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\operatorname{Re}(z_1\bar{z}_2)$；

（2）$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||$；

（3）$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并

其几何意义。

证：（1）$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$$=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$$

$$=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2-z_2\bar{z}_1-z_1\bar{z}_2$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-(\overline{z_1\bar{z}_2}+z_1\bar{z}_2)$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

（2）由（1）题知：

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$

又$||z_1|-|z_2||^2=|z_1|^2-2|z_1||z_2|+|z_2|^2$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1||\bar{z}_2|$$

$$=|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\bar{z}_2|.$$

$\because\quad |z_1\bar{z}_2|\geqslant\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$

$\therefore\quad |z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)\geqslant|z_1|^2+|z_2|^2-2|z_1\bar{z}_2|.$

即：$|z_1-z_2|^2\geqslant||z_1|-|z_2||^2.$

两边开平方得：$|z_1-z_2|\geqslant||z_1|-|z_2||.$

（3）$\because\quad |z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$，

$\qquad\quad |z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$，

两式相加得：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$．

其几何意义是：平行四边形两对角线长的平方和等于两邻边平方和的两倍。

6．设$z=x+iy$，证明：$\dfrac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$。

证：∵ $|z|=\sqrt{|x|^2+|y|^2}\leqslant\sqrt{(|x|+|y|)^2}$

$=|x|+|y|$，

$2|xy|\leqslant|x|^2+|y|^2$.

$\therefore 2|z|^2=2(\sqrt{|x|^2+|y|^2})^2=2(|x|^2+|y|^2)$

$\geqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2$，

两边开平方并除以$\sqrt{2}$得：$|z|\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)$，

$$\therefore \quad \frac{|x|+|y|}{\sqrt{2}}\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|.$$

7. 试证：分别以 z_1,z_2,z_3，及 w_1,w_2,w_3 为顶点的两个三角形同向相似的必要与充分条件是：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0$$

证：由复数的几何意义及平面几何学中关于相似三角形的判定定理和性质定理，可知这两个三角形同向相似的必要与充分条件是：

$$\frac{|z_3-z_1|}{|z_2-z_1|}=\frac{|w_3-w_1|}{|w_2-w_1|}$$

$$\arg(z_3-z_1)-\arg(z_2-z_1)$$
$$=\arg(w_3-w_1)-\arg(w_2-w_1)$$

也就是：$\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}=\frac{w_3-w_1}{w_2-w_1}$ （*）

又由 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ z_1 & z_2-z_1 & z_3-z_1 \\ w_1 & w_2-w_1 & w_3-w_1 \end{vmatrix}=$

$$=(z_2-z_1)(w_3-w_1)-(z_3-z_1)(w_2-w_1).$$

及(*)式与 $(z_2-z_1)(w_3-w_1)-(z_3-z_1)(w_2-w_1)=0$等价，知(*)式与

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}=0$$

等价。故得题中的结论。

8．如果 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，证明 z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆的一个正三角形的顶点。

证法一：设 $z_k=x_k+iy_k(k=1,2,3)$，由已知条件可知：

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ y_1+y_2+y_3=0 \end{cases} \quad (1) \quad \begin{cases} x_1^2+y_1^2=1 & (2) \\ x_2^2+y_2^2=1 & (3) \\ x_3^2+y_3^2=1 & (4) \end{cases}$$

由(1)解出x_1,y_1代入(2)得：$2x_2x_3+2y_2y_3=1$，(5)

$-1\times(5)+(3)+(4)$得：$(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2=3$；

即：$|z_2-z_3|=\sqrt{3}$。

同理可得：$|z_1-z_3|=|z_1-z_2|=\sqrt{3}$，故 z_1,z_2,z_3 正三角形的顶点。

又由已知条件知：z_1,z_2,z_3部是单位圆上的点，故z_1，z_2和z_3是内接于单位圆的正三角形的顶点。

证法二：

由 $z_1+z_2+z_3=0$，得 $z_3=-(z_1+z_2)$。

取共轭复数 $\bar{z}_3=-(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$，

$\therefore\quad z_3\bar{z}_3=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$

又 $|z_1|^2=|z_2|^2=|z_3|^2=1$，

$\therefore\quad z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2=-1,$

$\therefore\quad |z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$

$=|z_1|^2+|z_2|^2-(\bar{z}_1z_2+z_1\bar{z}_2)=1+1-(-1)=3,$

故 $|z_1-z_2|=\sqrt{3}$.

同理可证：$|z_1-z_3|=|z_2-z_3|=\sqrt{3}$

$\therefore$ z_1、z_2 和 z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

证法三：

考虑方程 $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0$，显然它的三个根就是 z_1，z_2，z_3。

设多项式

$(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)\equiv z^3+a_1z^2+a_2z+a_3,$

比较系数得：$a_1=z_1+z_2+z_3=0,$

$\because\quad |z_k|=1,\ \therefore\ z_k^{-1}=\bar{z}_k\ (k=1,\ 2,\ 3),$

$\therefore\quad a_2=z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3(\bar{z}_1+\bar{z}_2+\bar{z}_3)$

$=0.$

因此所考虑的方程变为：$z^3+a_3=0$　　（1）

由于 $z_1^3+a_3=0$ 知 $|a_3|=|-z_1^3|=1,$

因此（1）的三个根 z_1，z_2，z_3 满足关系式：

$cz_1=z_2,\ c^2z_1=z_3.$

其中 $c=\cos 120°+i\sin 120°$.

从而 z_1，z_2和z_3 是内接于单位圆的正三角形的顶点。

9．求证：$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cdot\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

证：左端$=(2\cos^2\frac{\theta}{2}+i\,2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2})^n$

$$=\left[2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\ \left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)=\text{右端。}$$

10. 解方程：$z^2-3iz-(3-i)=0$。

解法一：由求根公式得：$z=\frac{3i+\sqrt{3-4i}}{2}$， （1）

令$\sqrt{3-4i}=a+bi$，则$3-4i=a^2-b^2+2abi$。

比较系数得：$\begin{cases}a^2-b^2=3\\2ab=-4.\end{cases}$

解方程组得．$a=\pm2$，$b=\pm1$

因此：$\sqrt{3-4i}=\pm(-2+i)$，代入（1）得：

$$z_1=\frac{3i+(-2+i)}{2}=-1+2i,$$

$$z_2=\frac{3i-(-2+i)}{2}=1+i.$$

解法二：由求根公式得：$z=\frac{3i+\sqrt{3-4i}}{2}$．

设 $3-4i=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，则

$r=5$， $\operatorname{tg}\theta=\frac{-4}{3}$ ，$\cos\theta=\frac{3}{5}$（θ 是第四象限角）

所以，$\sqrt{3-4i}=5^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{2})$

$(k=0, 1)$。

当 $k=0$ 时

$$\sqrt{3-4i}=5^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

$$=5^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}\right)$$

$$=5^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}+i\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}\right)$$

$$=5^{\frac{1}{2}}\left(-\sqrt{\frac{4}{5}}+i\sqrt{\frac{1}{5}}\right)=-2+i.$$

当 $k=1$ 时，

$$\sqrt{3-4i}=5^{\frac{1}{2}}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)\right]$$

$$=-5^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)=2-i.$$

故方程组的解为：

$z_1=-1+2i$，$z_2=1+i$.

11．求：$\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})$ 的三次方根。

解：∵ $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$，

$$\therefore \sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}=\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}$$

$(k=0,\ 1,\ 2)$

所求的三次方根为：

$w_1=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$，

$$w_2=\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$w_3=\cos\frac{17}{12}\pi+i\sin\frac{17}{12}\pi.$$

12. 设 $|z_0|<1$，证明：

如果 $|z|=1$，那么 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|=1$；

如果 $|z|<1$，那么 $\left|\dfrac{z-z_0}{1-\overline{z_0}z}\right|<1$。

证：若 $|z|=1$，则有：

$$|z-z_0|=|z||z-z_0|=|z||\overline{z}-\overline{z_0}|$$

$$=|z\overline{z}-z\overline{z_0}|=|1-z\overline{z_0}|$$

$$\therefore\ \left|\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}\right|=1.$$

若 $|z|<1$，则 $|z|^2(1-|z_0|^2)<1-|z_0|^2$。

$\therefore\ |z|^2+|z_0|^2<1+|z|^2|z_0|^2$，

$$|z-z_0|^2=|z|^2+|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z_0})$$

$$<1+|z|^2|z_0|^2-2\mathrm{Re}(z\overline{z_0})=|1-z\overline{z_0}|^2.$$

$$\therefore\ \left|\frac{z-z_0}{1-z\overline{z_0}}\right|^2<1$$

由于复数模非负，两边开平方即得：

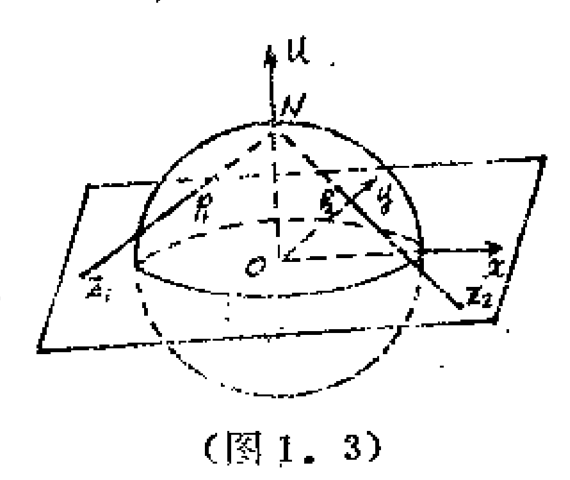
$$\left|\frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}\right|<1.$$

13. 设有限复数 z_1 及 z_2 在复球面上表示为 P_1 及P_2两点。求证P_1 及 P_2 的距离是：

$$\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

证：如(图1．3)，设复球面上的两点 P_1，P_2 的坐标分别为 (ξ_1,η_1,ζ_1)，(ξ_2,η_2,ζ_2)，球极为N（0，0，1）。

又设复平面上与 P_1P_2 对应的点分别为 $z_1(x_1,y_1,0)$，$z_2(x_2,y_2,0)$。



(图1．3)

由于 P_1，P_2 在球面上，

$\therefore\ \xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=1,\quad \xi_2^2+\eta_2^2+\zeta_2^2=1.$

又由于 N，P_1，z_1在一条直线上

$$\therefore\quad \frac{\xi_1-0}{x_1-0}=\frac{\eta_1-0}{y_1-0}=\frac{\zeta_1-1}{0-1},$$

$$\text{故}\quad x_1=\frac{\xi}{1-\zeta_1},\qquad y_1=\frac{\eta_1}{1-\zeta_1}.$$

$$\text{又因}\ |z_1|^2=x_1^2+y_1^2=\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{(1-\zeta_1)^2}=\frac{1-\zeta_1^2}{(1-\zeta_1)^2}$$

$$=\frac{1+\zeta_1}{1-\zeta_1},$$

$$\therefore\quad \zeta_1=\frac{|z_1|^2-1}{1+|z_1|^2}.$$

故可求得： $\xi_1=\dfrac{2x_1}{1+|z_1|^2}$， $\eta_1=\dfrac{2y_1}{1+|z_1|^2}$。

同理可求得：

$$\xi_2=\frac{2x_2}{1+|z_2|^2},\quad \eta_2=\frac{2y_2}{1+|z_2|^2},$$

$$\zeta_2=\frac{|z_2|^2-1}{|z_2|^2+1}.$$

由两点间的距离公式得：

$$\begin{aligned}|P_1P_2|&=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}\\&=\sqrt{2(-\xi_1\xi_2-\eta_1\eta_2-\zeta_1\zeta_2)}\\&=\sqrt{\frac{4[|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)]}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\\&=\sqrt{\frac{2^2|z_1-z_2|^2}{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}\\&=\frac{2|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|)^2(1+|z_2|^2)}}.\end{aligned}$$

14．满足下列条件的点 z 所组成的点集是什么？如果是区域，是单连通区域还是多连通区域？

（1） $\mathrm{Im}z=3$。

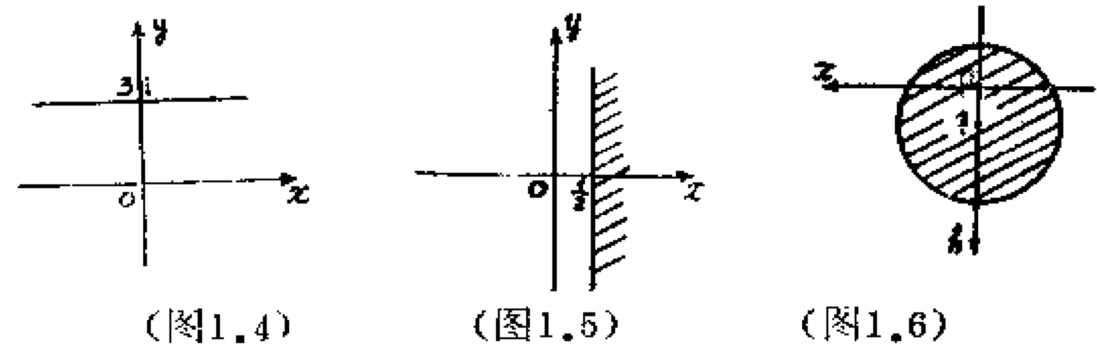
解：满足条件的一切点 z 所组成的点集是过点 $3i$ 且平行于实轴的一条直线（图 1．4）。它不是区域。

（2） $\mathrm{Re}z>\dfrac{1}{2}$.

解：满足条件的一切点 z 所组成的点集是以直线

$\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$ 为左界的半平面（不包括 $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}$）它是单连

通区域(图1.5)



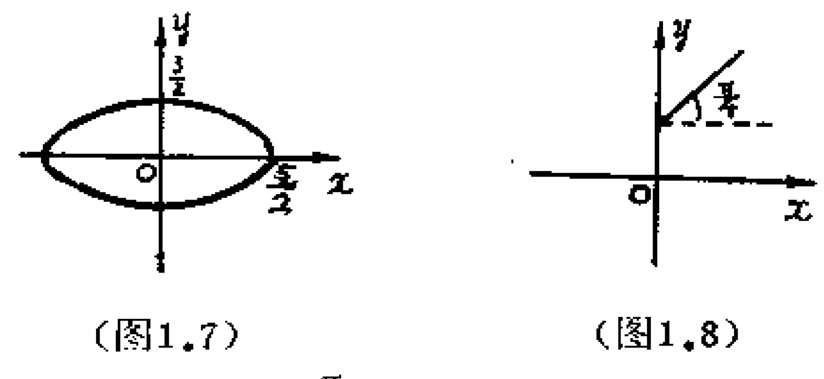
(图1.4)　　(图1.5)　　(图1.6)

(3) $|z-i|\leqslant|2+i|$.

解：上式即$|z-i|\leqslant\sqrt{5}$因此满足条件的一切点z所组成的点集是以点i为圆心，$\sqrt{5}$为半径的闭圆盘（图1.6），它不是区域，而是一个闭区域。

(4) $|z-2|+|z+2|=5$.

解：根据复数差的模的几何意义和椭圆的定义，立即可知满足上式的一切点z所组成的点集是以点± 2为焦点，$\frac{5}{2}$为长半轴的椭圆（图1.7）。它不是区域。



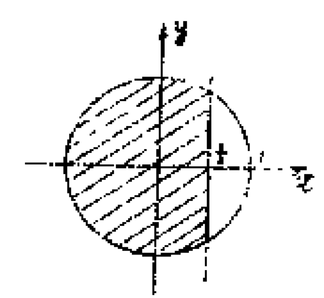
(图1.7)　　(图1.8)

(5) $arg(z-i)=\frac{\pi}{4}$

解：满足上式的一切点z所组成的点集是以点i为端点，斜率为1的半射线（不包括端点i）（图1.8）。它不是区域。

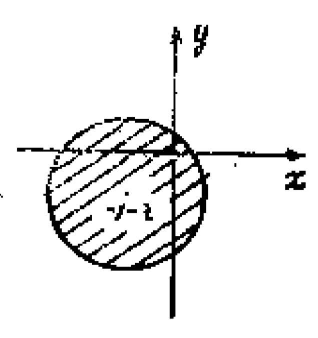
(6) $|z|<1$,　$\mathrm{Re}\,z\leqslant\frac{1}{2}$

解：满足条件的一切点z所组成的点集是以原点为圆心，1为半径的圆盘和以直线$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}$为右边界的区域（包括$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}$）的公共部分（图1.9）。又因位于圆盘内的直线$\mathrm{Re}z=\frac{1}{2}$上的点不是内点，故它不是区域。


图（1.9）

（7）$0<|z+1+i|<2$。

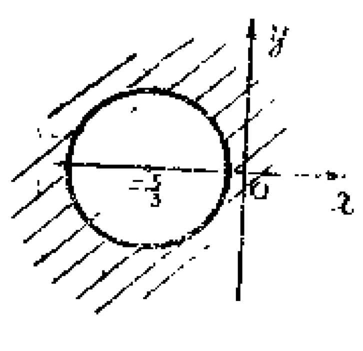
解：满足条件的一切点z所组成的点集是以$-(1+i)$为圆心，2为半径去掉圆心的圆盘(图1.10)。它是多连通区域。


图（1.10）

（8）$\left|\frac{z+1}{z-1}\right|\leqslant 2$

解：上式可化为$|z-1|\leqslant\frac{1}{2}|z+1|$，由此可得：$(x+\frac{5}{3})^2+y^2\geqslant(\frac{4}{3})^2$。

因此满足条件的一切点z所组成的点集是以$-\frac{5}{3}$为圆心，$\frac{4}{3}$为半径的圆盘外所有点的集合(图1.11)。它是闭区域。


图（1.11）

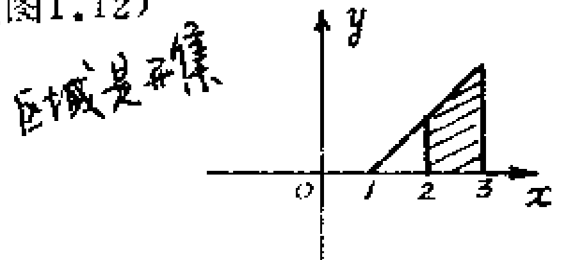
（9）$0<\arg(z-1)<\frac{\pi}{4}$，

$2<\mathrm{Re}z<3$。

解：满足条件的一切点所组成的点集是以直线$\mathrm{Re}z=2$，$\mathrm{Re}z=3$为左、右底，以直线$\arg(z-1)=\frac{\pi}{4}$和实轴为上、

下腰的一个梯形（不包括周界）（图1.12）

它是单连通区域。



（图1.12）

(10) $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$

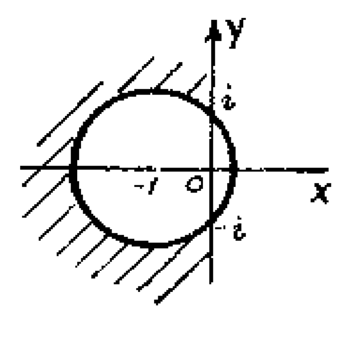
解：∵ $\dfrac{z-i}{z+i}=\dfrac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\dfrac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$。又 $0<\arg\dfrac{z-i}{z+i}<\dfrac{\pi}{4}$

$$\therefore\quad \frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0,$$

于是有

$$\begin{cases}-2x>0,\\ x^2+y^2-1>0,\\ -2x<x^2+y^2-1\end{cases}\qquad \therefore\begin{cases}x<0,\\ x^2+y^2>1,\\ (x+1)^2+y^2>2.\end{cases}$$

它表示在圆 $(x+1)^2+y^2=(\sqrt{2})^2$ 外且属于左半平面的所有点的集合（图1.13），它是单连通区域。



图（1.13）

第二章　复变函数

1.试问函数$\frac{1}{1+z^2}$在圆盘$|z|<1$（称为单位圆盘）内是否连续？是否一致连续？

解：$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$在$|z|<1$内是连续的。根据教材$p.22$最后三行所述性质，可得这一结论。但也可证明如下：

设z_0是$|z|<1$内任一点，取$\delta_0>0$，使z_0的δ_0邻域$|z-z_0|<\delta_0$完全包含在$|z|<1$内（图2.1）

显然对该邻域内任一点z都有：

$$|z|<|z_0|+\delta_0<1.$$

$$\therefore\quad |1+z^2|\geqslant 1-|z|^2$$

$$\geqslant 1-|z|>1-(|z_0|+\delta_0)>0,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{|1+z^2|}<\frac{1}{1-(|z_0|+\delta_0)}.$$

图（2.1）

从而
$$|f(z)-f(z_0)|=\frac{|z_0^2-z^2|}{|1+z_0^2||1+z^2|}$$

$$\leqslant\frac{2|z-z_0|}{|1+z_0^2||1+z^2|}<\frac{2|z-z_0|}{|1+z_0^2|(1-|z_0|-\delta_0)}$$

由此可见，若取

$$\delta\leqslant min\left[\delta_0,\ \frac{|1+z_0^2|(1-|z_0|-\delta_0)\varepsilon}{2}\right]$$

则对预先任意给定的$\varepsilon>0$，只要$|z-z_0|<\delta$，就有

$|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$,

$\therefore\quad f(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ 在$z=z_0$处连续。

由于z_0的任意性可知$f(z)$在$|z|<1$ 内连续。

但$f(z)$在$|z|<1$ 内不一致连续。因为，若取

$z_1=\dfrac{n}{n+1}i,\quad z_2=\dfrac{n-1}{n}i,$ 则$|z_1-z_2|=\dfrac{1}{n(n+1)}$,

可见只要n充分大时，$|z_1-z_2|$就可以任意小。而

$$\left|\frac{1}{1+z_1^2}-\frac{1}{1+z_2^2}\right|=\left|\frac{1}{1-\dfrac{n^2}{(n+1)^2}}-\frac{1}{1-\dfrac{(n-1)^2}{n^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{(n+1)^2}{2n+1}-\frac{n^2}{2n-1}\right|=\left|\frac{2n^2-1}{4n^2-1}\right|$$

$$=\frac{1-\dfrac{1}{2n^2}}{2-\dfrac{1}{2n^2}}\to\frac{1}{2}\neq 0\ (\text{当}n\to\infty\text{时})。$$

2. 证明函数$f(z)=|z|^2$除去在$z=0$外，处处不可微。

证：当$z_0=0$时，

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{z\to 0}\frac{|z|^2}{z}=\lim_{z\to 0}\bar{z}=0$$

即$f(z)$在$z=0$可微。

但当$z_0\neq 0$时是不可微的，证明如下：

证法一：设$z=x+iy$，$f(z)=u+iv$，

由$f(z)=|z|^2=x^2+y^2$ 有

$u=x^2+y^2$，$v=0$；$\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}\right]_{(x_0,y_0)}=2x_0$,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{(x_0,\ y_0)}=2y_0;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

由于$z_0\neq 0$，故在$z_0=x_0+iy_0$中，x_0，y_0不能同时为0。可见，$C-R$条件不满足，所以$f(z)=|z|^2$在$z_0\neq 0$不可微。

证法二：设$z_0=x_0+iy_0$。若取$z=x+iy_0$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+y_0^2-x_0^2-y_0^2}{x+iy_0-x_0-iy_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}(x+x_0)=2x_0.$$

若取　$z=x_0+iy$，则

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x_0^2+y^2-x_0^2-y_0^2}{x_0+iy-x_0-iy_0}$$

$$=\lim_{y\to y_0}[-i(y+y_0)]=-2y_0i.$$

由于x_0，y_0不能同时为0，所以当z分别沿平行于x轴和y轴的两个方向趋于z_0时，$\dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$趋于不同的极限值，所以$f(z)$在$z_0\neq 0$不可微。

3．设$f(z)$在区域D内解析，证明：如果对每一点，$z\in D$，有$f'(z)=0$，那么$f(z)$在D内为常数。

证：因$f(z)$在D内解析，对任意$z\in D$有，$f'(z)=0$，

故　$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

于是对任意$z\in D$，

有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$， $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$。从而，在$D$内恒

有 $u(x, y)=c_1$，$v(x, y)=c_2$（c_1, c_2为任意常数）。所以在D内，$f(z)=c_1+ic_2$。

4．设函数$f(z)$在区域D内解析，证明：如果$f(z)$满足下列条件之一，那么它在D内为常数

（1）$\mathrm{Re}f(z)$或$\mathrm{Im}f(z)$在D内为常数；

（2）$|f(z)|$在D内为常数。

证：（1）设$f(z)=u+iv$。则由条件得：

$u=\mathrm{Re}f(z)=c$（常数）。故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$。

由于$f(z)$在D内解析，可得：

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=0$，$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=0$，因此$v=c_1$（常数）。

$\therefore \quad f(z)=c+ic_1$

同样可证：当$\mathrm{Im}f(z)=c$时，$f(z)$在D内为常数。

（2）设$f(z)=u+iv$，则由条件可知，在D内

有 $u^2+v^2=c$。

若$c=0$，则$u=v=0$，$f(z)=0$，结论显然成立。

若$c\neq 0$，将$u^2+v^2=c$的两边分别对x，y求偏导数

得：
$$2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=0\cdots\cdots①$$
$$2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=0\cdots\cdots②$$

由于$f(z)$在D内解析，故有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

代入②式得：

$$2v\frac{\partial u}{\partial x}-2u\frac{\partial v}{\partial x}=0\cdots\cdots③$$

$$\because \begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2v & -2u \end{vmatrix}=-4(u^2+v^2)=-4c\neq 0$$

$\therefore$ 由①和③得：$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=0$。

并立即可得：$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$。

$\therefore\quad u=c_1,\ v=c_2\qquad$ (c_1，c_2都是常数)。

$\therefore\quad f(z)=c_1+ic_2$。

5．证明：若函数$f(z)$在上半平面解析，那么函数$\overline{f(\bar{z})}$在下半平面解析。

证法一：设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ ($y>0$)。

$\because\ f(z)$在上半面解析，

$\therefore\quad u(x,y)$，$v(x,y)$在上半平面可微，且

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\cdots①$$

而 $\quad\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-iv(x,-y)$

作为定义在下半平面的函数，应有$y<0$。$\overline{f(\bar{z})}$的实部$u(x,-y)$可视作两个可微函数$u(x,Y)$和$Y=-y$的复合函数，因而在下半平面可微；同理$\overline{f(\bar{z})}$的虚部$-v(x,-y)$

也在下半平面可微，并且根据①有

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}=\frac{\partial u(x,Y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,Y)}{\partial Y}=\frac{\partial v(x,Y)}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial Y}$$

$$=\frac{\partial v(x,-y)}{\partial y}\cdot(-1)=\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial y},$$

类似地可推得：$\dfrac{\partial u(x,-y)}{\partial y}=-\dfrac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial x}$

∴$\overline{f(\overline{z})}$在下半平面内解析。

证法二：设 $F(z)=\overline{f(\overline{z})}$，在下半平面内任取一点$z_0$，$z$是下半平面内异于$z_0$的点，则由$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$可得：

$$F'(z_0)=\lim_{z\to z_0}\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{z_0})}}{z-z_0}$$

$$=\lim_{z\to z_0}\overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}$$

$$=\overline{\left(\lim_{\overline{z}\to\overline{z_0}}\frac{f(\overline{z})-f(\overline{z_0})}{\overline{z}-\overline{z_0}}\right)}$$

其中$\overline{z_0}$、$\overline{z}$在上半平面内，由于$f(z)$在上半平面内解析，因此有：

$F'(z_0)=f'(\overline{z_0})$。故$F(z)=\overline{f(\bar{z})}$在下半平面内解析。

6. 试利用$C-R$条件，证明下列函数在复平面上解析：

z^2，e^z，$\sin z$，$\cos z$；

而下列函数不解析：

$\bar{z}^2$，$e^{\bar{z}}$，$\sin\bar{z}$，$\cos\bar{z}$。

证：设$z=x+iy$，则

$z^2=x^2-y^2+i2xy$，　　$u=x^2-y^2$，　　$v=2xy$。

在复平面上：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=2x$，　　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-2y$。

显然偏导数均连续，因此$u=x^2-y^2$，$v=2xy$可微且满足$C-R$条件，故z^2在复平面上解析。

$e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$，$u=e^x\cos y$，$v=e^x\sin y$。

在复平面上：

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-e^x\sin y$。

由此可见：u，v可微且满足$C-R$条件，故e^z在复平面上解析。

$\sin z=\sin x\cosh y+i\sinh y\cos x$，

$u=\sin x\cosh y$，$v=\cos x\sinh y$。

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=\cos x\cosh y$，　$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}=\sin x\sinh y$

由此可见：u，v可微且满足$C-R$条件，故$\sin z$在复平面上解析。

$\cos z=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y$，

$u=\cos x\cosh y$，$v=\sin x\sinh y$，

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -\sin x\cosh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \cos x\sinh y.$$

由此可见：u, v 可微且满足$C-R$ 条件。故 $\cos z$ 在复平面上解析。

$$\bar{z}^2 = x^2 + y^2 - i2xy, \quad u = x^2 + y^2, \quad v = -2xy.$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x.$$

可见：$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ 在复平面上除 $x=0$ 外均不成立，故 $\bar{z}^2$ 在复平面上不解析。

$$e^{\bar{z}} = e^x(\cos y - i\sin y) \quad u = e^x\cos y, \quad v = -e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x\cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x\cos y.$$

只当 $y = k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 时才有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

由此可见：$e^{\bar{z}}$在复平面上不解析。

$$\sin\bar{z} = \sin x\cosh y - i\cos x\sinh y,$$

$$u = \sin x\cosh y, \quad v = -\cos x\sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\cosh y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\cos x\cosh y.$$

只当$x = k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$ 时才有 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$，

可见 $\sin\bar{z}$ 在复平面上不解析。

$$\cos\bar{z} = \cos x\cosh y + i\sin x\sinh y.$$

$$u = \cos x\cosh y,\quad v = \sin x\sinh y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\sin x\cosh y,\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sin x\cosh y.$$

可见：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ 在 z 平面上除 $x = k\pi\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$

外都不成立，故 $\cos\bar{z}$ 在复平面上不解析。

7．证明在极坐标下的柯西一黎曼条件是：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

证：　设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$，

$x = r\cos\theta,\qquad y = r\sin\theta.$

则
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta;\\
\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta\\
\frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta;\\
-r\frac{\partial u}{\partial r} &= -r\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\right)
\end{aligned}\right\}\quad (*)$$

因此由在直角坐标下的 $C-R$ 条件可得：

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

反之，由 $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$，　$\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -r\dfrac{\partial v}{\partial r}$，

并利用（*）可得：

$$\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta=\frac{\partial v}{\partial y}\cos\theta-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\theta,$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\theta+\frac{\partial u}{\partial y}r\cos\theta$$

$$=-r\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta\right),$$

即：$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin\theta=0,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos\theta-\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\theta=0.$$

$\because \cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 不能同时为 0，

$$\therefore\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} & -\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\end{vmatrix}=0$$

即：$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=0.$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

由此可知，在极坐标下的 $C—R$ 条件为：

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\quad \frac{\partial u}{\partial \theta}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

8．下章将要证明：在任何区域 D 内解析函数 $f(z)$ 一定有任意阶导数。由此证明：

(1) $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内也有任意阶导数，并且满足拉普拉斯方程：

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0;$$

(2) 在 D 内，$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$.

证：(1) ∵ $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在 D 内有导数，

∴ $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$ 和虚部 $v(x,y)$ 的偏导数存在，

且 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$. 又 $f'(z)$ 在 D 内有导数，而 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial v}{\partial x}$, $-\frac{\partial v}{\partial y}$ 分别为 $f'(z)$ 的实部和虚部。所以 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$ 均有偏导数，这就表明 $f(z)$ 的实部和虚部有二阶偏导数。

因为 $f(z)$ 在 D 内有任意阶偏导数，故可类似推出 $f(z)$ 的实部和虚部在 D 内也有任意阶偏导数。

又 $$f''(z)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right)-i\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right),$$

比较上式的实部和虚部得到：

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 即 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$, 即 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$.

(2) 令 $f(z)=u+iv$, 则 $|f(z)|^2=u^2+v^2$.

左端 $=\frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^2+v^2)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(u^2+v^2)$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+$$

$$+2v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

$$=2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+$$

$$+2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+$$

$$+2v\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$

$$=4\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]$$

$=4|f'(z)|^2=$ 右端.

故原等式成立。

9. 求出 e^{2+i}, $Ln(1+i)$, i^i, $1^{\sqrt{2}}$, $(-2)^{\sqrt{2}}$ 的值。

解: $e^{2+i}=e^2(\cos 1+i\sin 1)$

$$Ln(1+i)=\ln|1+i|+i[\arg(1+i)+2k\pi]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2+i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$$

$$i^i=e^{iLni}=e^{i[\ln 1+i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]}$$

$$=e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}\qquad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}1} = e^{\sqrt{2}(\ln 1 + i2k\pi)} = e^{i2\sqrt{2}k\pi}$$

$$= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + i\sin(2\sqrt{2}k\pi)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

$$(-2)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}\mathrm{Ln}(-2)} = e^{\sqrt{2}[\ln 2 + i(\pi + 2k\pi)]}$$

$$= e^{\sqrt{2}\ln 2}\{\cos[\sqrt{2}(2k+1)\pi] +$$

$$+ i[\sin\sqrt{2}(2k+1)\pi]\}\ (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

10．由$z = \sin w$及$z = \cos w$所定义的函数w分别称为z的反正弦函数及反余弦函数，求出它们的解析表达式（利用对数函数）．

解：已知 $z = \sin w = \dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$，

$\therefore\quad e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$

利用一元二次方程求根公式解得：

$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2}$　　即　$iw = \mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$，

$\therefore\quad w = \arcsin z = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}).$

利用同样的方法解得：

$w = \arccos z = -i\mathrm{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$

11．由$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$及$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$所定义的函数分别称为双曲正弦函数和双曲余弦函数．证明：

$\sinh z = -i\sin iz$，$\cosh z = \cos iz$．

由此从关于三角函数的有关公式导出：

$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$，

$\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$，

$\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$，

$\sin(x+iy)=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y,$

$\cos(x+iy)=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y,$

$\frac{d}{dz}\sinh z=\cosh z,\qquad \frac{d}{dz}\cosh z=\sinh z.$

证：$\sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}=i\frac{e^{-i(iz)}-e^{i(iz)}}{2i}$

$=-i\sin(iz).$

$\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\frac{e^{-i(iz)}+e^{i(iz)}}{2}=\cos iz.$

$\cosh^2 z-\sinh^2 z=\cos^2 iz+\sin^2 iz=1.$

$\sinh(z_1+z_2)=-i\sin(iz_1+iz_2)$

$=-i(\sin iz_1\cos iz_2+\cos iz_1\sin iz_2)$

$=\sinh z_1\cosh z_2+\sinh z_2\cosh z_1$

$\cosh(z_1+z_2)=\cos i(z_1+z_2)$

$=\cos iz_1\cos iz_2-\sin iz_1\sin iz_2$

$=\cosh z_1\cosh z_2+\sinh z_1\sinh z_2.$

$\sin(x+iy)=\sin x\cos iy+\cos x\sin iy$

$=\sin x\cosh y+i\cos x\sinh y.$

$\cos(x+iy)=\cos x\cos iy-\sin x\sin iy$

$=\cos x\cosh y-i\sin x\sinh y.$

$\because\quad \sinh z=\frac{e^z-e^{-z}}{2},$

$\therefore\quad \frac{d}{dz}\sinh z=\frac{d}{dz}\frac{e^z-e^{-z}}{2}=\frac{e^z+e^{-z}}{2}=\cosh z.$

又 $\cosh z=\frac{e^z+e^{-z}}{2},$

$$\therefore \quad \frac{d}{dz}\cosh z = \frac{d}{dz}\frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \sinh z.$$

12. 设两个实变数的函数 $u(x,y)$ 有偏导数，这一函数可写成 $z=x+iy$ 及 $\bar{z}$ 的函数

$$u = u\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right),$$

再把 z 和 $\bar{z}$ 看作是相互独立的，证明：

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

设复变函数 $f(z)$ 的实部及虚部分别是 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$，并且它们都有偏导数。求证：对于 $f(z)$，柯西黎曼条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}} = 0.$$

证：由于 $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$，$y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

根据复合函数求偏导数法则，有：

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}.$$

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，由于 $f(z)$ 的实部 $u(x,y)$，虚部 $v(x,y)$ 都有偏导数，故由方才所证知：

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial u}{\partial y}+i\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{i}{2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

按 C—R 条件 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$，故对$f(z)$，

C—R条件可写成：$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}+i\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}=0$。

13．设函数 $f\left(\frac{1}{z}\right)$在 $z=0$ 解析，那么我们说$f(z)$在$z=\infty$解析。下列函数中，那些在无穷远点解析？

e^z，$Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$，$\frac{a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m}{b_0+b_1z+\cdots+b_nz^n}$，$\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$

解：设 $f(z)=e^z$，则 $f\left(\frac{1}{z}\right)=e^{\frac{1}{z}}$，取 $z=x$，

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\(x>0)}} e^{\frac{1}{x}}=\infty,$$

$$\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)=\lim_{\substack{x\to 0\\(x<0)}} e^{\frac{1}{x}}=0,$$

$\therefore$ $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{1}{z}}$不存在。

故 $e^{\frac{1}{z}}$ 在$z=0$处不解析，即e^z在$z=\infty$处不解析。

设 $f\left(\frac{1}{z}\right)=Ln\frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}=Ln\frac{1+z}{1-z}$

$$=Ln(1+z)-Ln(1-z).$$

因为$Ln(1+z)$与$Ln(1-z)$都是多值解析函数，$z=0$不是枝点，$f\left(\frac{1}{z}\right)$的每一个单值分枝在$z=0$处是解析的。

故 $f(z)=Ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$的每一个单值分枝在$z=\infty$是解析的。

设 $f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{a_0+a_1\frac{1}{z}+\cdots+a_m\frac{1}{z^m}}{b_0+b_1\frac{1}{z}+\cdots+b_n\frac{1}{z^n}}$

$$=z^{n-m}\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}.$$

当 $m\leqslant n$时，$f\left(\frac{1}{z}\right)$在 $z=0$ 处是解析的，故所给有理函数在$z=\infty$处是解析的；当 $m>n$ 时，$f\left(\frac{1}{z}\right)$在 $z=0$ 处不解析，故所给的有理函数在$z=\infty$处不解析。

$f\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\sqrt{\frac{1}{z}}}{1+\sqrt{\frac{1}{z}}}=\frac{1}{1+\sqrt{z}}$在 z 平面上是双值函数，

$z=0$为枝点，它的两个单值分枝在$z=0$不解析。

$\therefore\quad f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}}$在$z=\infty$处不解析。

14. 在复平面上取上半虚轴作割线。试在所得区域内分别取定函数$\sqrt{z}$和Lnz在正实轴分别取正实值和实值的一个解析分枝，并求它们在上半虚轴左沿的点及右沿的点$z=i$处的值。

解：$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{2}}$在正实轴上取正实值的一个解析分枝为：

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,e^{i\frac{\arg z}{2}}\quad\left(\frac{\pi}{2}-2\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\right).$$

在右沿点$z=i$处，$\sqrt{i}=e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

在左沿点$z=i$处，$\sqrt{i}=e^{-i\frac{3\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

$Lnz=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$，在正实轴取实值的一个解析分枝为：

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z\qquad\left(\frac{\pi}{2}-2\pi<\arg z<\frac{\pi}{2}\right).$$

在左沿点 $z=i$ 处，$\ln i=\ln 1+i\left(-\frac{3\pi}{2}\right)=-\frac{3}{2}\pi i$.

在右沿点 $z=i$ 处，$\ln i=\ln 1+i\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}i$.

15. 在复平面上取正实轴作割线．试在所得区域内：

(1)取定函数 $z^a(-1<a<0)$ 在正实轴上沿取正实值的一个解析分枝，并求这一分枝在$z=-1$处的值；在正实轴下沿的值．(2)取定函数 Lnz 在正实轴上沿取实值的一个解析分枝，并求这一分枝在 $z=-1$ 处的值，在正实轴下沿

的值。

解：(1) $z^a=e^{aLnz}=e^{a[\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)]}$

$=e^{a\ln|z|}\cdot e^{ia(\arg z+2k\pi)}\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2\cdots)$。

在正实轴上沿取实值的一个解析分枝为：

$z^a=e^{a\ln|z|}e^{ia\arg z}\quad (0<\arg z<2\pi)$。

此分枝在$z=-1$处：

$(-1)^a=e^{a\ln|-1|}e^{ia\pi}=\cos a\pi+i\sin a\pi$。

在正实轴下沿点$z=x$处的值为：

$x^a=e^{a\ln x}e^{i2a\pi}=e^{a\ln x}(\cos 2a\pi+i\sin 2a\pi)$。

（2）因为 $Lnz=\ln|z|+i\arg z+2k\pi i$，所以 Lnz 在正实轴上沿取实值的解析分枝为：

$\ln z=\ln|z|+i\arg z\quad (0<\arg z<2\pi)$。

此分枝在$z=-1$处，$\ln(-1)=\ln|-1|+i\pi=\pi i$。

在正实轴下沿点$z=x$处的值为：

$\ln x=\ln|x|+2\pi i=\ln x+2\pi i$。

16。求函数$\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$ $(0<k<1)$ 的枝点。证明它在线段：

$$-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant -1,\qquad 1\leqslant x\leqslant \frac{1}{k}$$

的外部，能分成解析分枝，并求在$z=0$取正值的那个分枝。

解：$w=f(z)=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$

$=\sqrt{(1-z)(1+z)(1-kz)(1+kz)}$

$$=k\sqrt{(z-1)(z+1)\left(z-\frac{1}{k}\right)\left(z+\frac{1}{k}\right)}$$

$(0<k<1)$。

设在z_1处有起始值：

$$z_1-1=r_1e^{i\theta_1},\qquad z_1+1=r_2e^{i\theta_2}$$

$$z_1-\frac{1}{k}=r_3e^{i\theta_3}\qquad z_1+\frac{1}{k}=r_4e^{i\theta_4}.$$

从而 $f(z)=\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$的起始值$w_1$为：

$$k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{2}}=w_1.$$

下面求枝点：由于$\sqrt{z}$的枝点是0和∞，所以所给函数可能有枝点 ±1， $\pm\frac{1}{k}$和∞。

当z依逆时针方向沿任一条不经过±1，$\pm\frac{1}{k}$，并在其内部包含点$z=1$而不包含其它三点的简单闭曲线连续变动回到原来位置时，θ_1变为$\theta_1+2\pi$。$\theta_2,\theta_3,\theta_4$不变。起始值$w_1$变为

$$k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+2\pi}{2}}=-w_1.$$

所以 $z=1$是w的枝点，

类似地，可以说明$z=-1$，$z=\pm\frac{1}{k}$也是$w=f(z)$的枝点。

又当z依逆时针方向沿任一条不经过±1，$\pm\frac{1}{k}$，但其内部包含这四个枝点的简单闭曲线连续变动回到原来位置时，$\theta_1,\theta_2,\theta_3$和$\theta_4$的值都增加$2\pi$。

因此

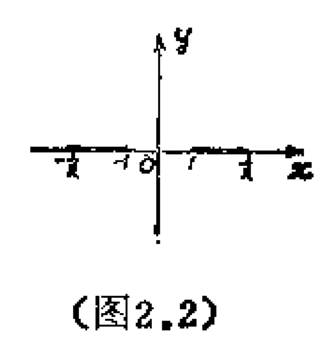
$$w=k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+8\pi}{2}}=w_1.$$

故 $z=\infty$不是$w=f(z)$的枝点。

类似地，可以证明：若简单闭曲线内部恰含两个枝点，则点 z 依逆时针方向沿曲线连续变动一周时，函数值也不改变。

所以在复平面上作割线：

$$-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant -1,\qquad 1\leqslant x\leqslant\frac{1}{k},$$



(图2.2)

如图2.2，在所得的区域内，可把$w=f(z)$ 分成连续分枝，而这些分枝又都是解析的。因此在$-\frac{1}{k}\leqslant x\leqslant 1$，$1\leqslant x\leqslant\frac{1}{k}$ 的外部（记作D），所给函数能分成两个解析分枝：

$$w_l=k\sqrt{r_1r_2r_3r_4}\,e^{i\frac{\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+2l\pi}{2}}\quad(l=0,1).$$

即 $$w_l=\left|(1-z^2)(1-k^2z^2)\right|^{\frac{1}{2}}\cdot e^{i\frac{1}{2}[\arg(1-z^2)+\arg(1-k^2z^2)+2l\pi]}\quad(z\in D).$$

已知$z=0$时，w为正值。

即 $$w_l=\left|(1-0)(1-0)\right|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{\arg(1-0)+\arg(1-0)+2l\pi}{2}}$$
$$=e^{il\pi}=\text{正值。}\ \therefore\quad l=0.$$

故在$z=0$取正值的那个分枝为：

$$w_0=\left|(1-z^2)(1-k^2z^2)\right|^{\frac{1}{2}}e^{i\frac{1}{2}[\arg(1-z^2)+\arg(1-k^2z^2)]}.$$

17. 研究函数

$w=\sqrt[3]{\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}}$的枝点，并在割线：

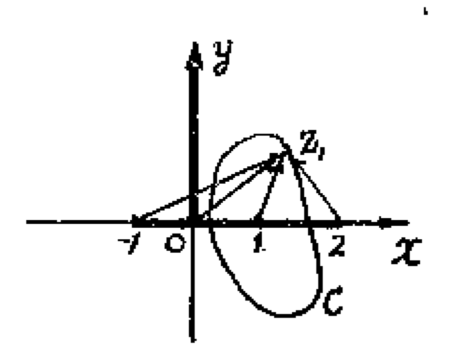
$-1\leqslant x\leqslant 2(y=0)$ 及 $y>0(x=0)$ 的外部区域内，求解析分枝$(z=3,\ w>0)$ 在上半虚轴右沿点和左沿点 $z=i$ 处的值。

解：我们知道：

$$w=\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{i}{3}[Arg(z+1)-Arg z+Arg(z-1)+Arg(z-2)]}.$$

先求支点。任作一条简单连续闭曲线C，使其不经过-1，0，1及2，并使其内区域含1，但不含-1，0及2。设z_1是C上一点。取定$Arg(z+1)$，$Arg z$，$Arg(z-1)$及$Arg(z-2)$在这点的值$\arg(z_1+1)$，$\arg z_1$，$\arg(z_1-1)$及$\arg(z_1-2)$（图2.3）。当z从z_1按反时针方向沿C连续变动一周时，通过连续变动，$\arg(z_1+1)$，$\arg z_1$及$\arg(z_1-2)$没有变化，$\arg(z_1-1)$增加了2π。于是w在z_1的值就从



(图2.3)

$$\left|\frac{(z_1+1)(z_1-1)(z_1-2)}{z_1}\right|^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{i}{3}[\arg(z_1+1)-\arg z_1+\arg(z_1-1)+\arg(z_1-2)]}=w_1$$

连续变动到

$$\left|\frac{(z_1+1)(z_1-1)(z_1-2)}{z_1}\right|^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\frac{i}{3}[\arg(z_1+1)-\arg z_1+\arg(z_1-1)+2\pi+\arg(z_1-2)]}\neq w_1.$$

因此1是函数w的支点；同样可证明-1，0及2也是它的

支点。任作一条简单连续闭曲线，使其内区域含 -1，0，1 及 2，可证明 ∞ 是函数 w 的支点。

因此，在复平面上沿实轴作割线 $-1\leqslant x\leqslant 2(y=0)$ 和沿虚轴作割线 $y>0(x=0)$，如图(2.3)，则在所得区域 D 内，可把 w 分成解析分支。

在 $z=3$，取 $\arg(z+1)=0$，$\arg z=0$，$\arg(z-1)=0$，$\arg(z-2)=0$。于是在 D 内，w 可分成三个解析分支：

$$w=\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{i}{3}[\arg(z+1)-\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)+2k\pi]}\ (k=0,1,2).$$

由假设 $z=3$ 处，$w>0$，可见这一分支是

$$w=\left|\frac{(z+1)(z-1)(z-2)}{z}\right|^{\frac{1}{3}}\cdot e^{\frac{i}{3}[\arg(z+1)-\arg z+\arg(z-1)+\arg(z-2)]}$$

在区域 D 内，如图（2.4），当 z 从 3 沿曲线 c_1 连续变动到上半虚轴右沿点之时，$\arg(z+1)$ 增加了 $\frac{\pi}{4}$，$\arg z$ 增加了 $\frac{\pi}{2}$，$\arg(z-1)$ 增加了 $\frac{3\pi}{4}$，$\arg(z-2)$ 增加了 $\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$。

（图2.4）

故在上半虚轴右沿点之处，$\arg(z+1)=\frac{\pi}{4}$，

$$\arg z=\frac{\pi}{2},\quad \arg(z-1)=\frac{3\pi}{4},\ \arg(z-2)$$

$=\pi-arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}$。因此$w$的所求分支在上半虚轴右沿点$i$处的值是

$$\sqrt[3]{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}\ e^{\frac{i}{3}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+\frac{3\pi}{4}+\pi-arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\right]}$$

$$=\sqrt[6]{20}\ e^{\frac{i}{3}\left[\pi+\left(\frac{\pi}{2}-arc\ \mathrm{tg}\ \frac{1}{2}\right)\right]}=\sqrt[6]{20}e^{\frac{i}{3}\left(\pi+arc\ \mathrm{ctg}\frac{1}{2}\right)}.$$

依上述同样的方法，可得在上半虚轴左沿点处，

$$\arg(z+1)=-\frac{7\pi}{4},\ \arg z=-\frac{3\pi}{2},\ \arg(z-1)=-\frac{5\pi}{4},$$

$$\arg(z-2)=-\pi-arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}.$$

因此w的所求分支在上半虚轴左沿点i处的值是

$$\sqrt[6]{20}\ e^{\frac{i}{3}\left(-\frac{7\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}-\frac{5\pi}{4}-\pi-arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\sqrt[6]{20}\ e^{\frac{i}{3}\left(-3\pi+\frac{\pi}{2}-arc\ \mathrm{tg}\frac{1}{2}\right)}=-\sqrt[6]{20}\ e^{\frac{i}{3}arc\ \mathrm{ctg}\frac{1}{2}}.$$

18。找出下列推理的错误：因为$(-z)^2=z^2$，所以$2Ln(-z)=2Lnz$。因此$Ln(-z)=Lnz$。

解：此结论是错误的。

$\because\quad Lnz=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$，

$\quad Ln(-z)=\ln|-z|+i[\arg z+(2k+1)\pi]$。

显然，Lnz与$Ln(-z)$的值没有一个对应相等。推论的错误在于：由$(-z)^2=z^2$，按对数函数的性质，固然可以推出$Ln(-z)^2=Lnz^2$，但$Lnz^2\neq 2Lnz$。因而不能由此推出：$2Ln(-z)=2Lnz$。

第三章　复变函数的积分

1．分别计算沿着（1）直线段；（2）单位圆（$|z|=1$）的左半圆；（3）单位圆的右半圆的下列积分：

$$I=\int_{-i}^{i}|z|dz.$$

解：如图 3.1。

图3.1

（1）把从 $-i$ 到 i 的直线方程写作 $z=it$，$-1\leqslant t\leqslant 1$。则

$$|z|=|t|=\begin{cases}-t, & -1\leqslant t<0\text{时};\\ t, & 0\leqslant t\leqslant 1\text{时}.\end{cases}$$

$dz=idt$。

所以

$$\begin{aligned}I&=\int_{-i}^{0}|z|dz+\int_{0}^{i}|z|dz\\&=\int_{-1}^{0}(-t)idt+\int_{0}^{1}ti\cdot dt=2i\int_{0}^{1}t\,dt\\&=it^{2}\Big|_{0}^{1}=i.\end{aligned}$$

（2）把单位圆的左半圆的方程写作 $z=e^{i\theta}$，

$\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{2}$。则 $dz=ie^{i\theta}d\theta$，而 $|z|=1$。

所以 $\quad I=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\theta}d\theta=e^{i\theta}\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2i.$

（3）把单位圆的右半圆的方程写作 $z=e^{i\theta}$,

$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则$dz=ie^{i\theta}d\theta$，而$|z|=1$.

所以 $\quad I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ie^{i\theta}d\theta=e^{i\theta}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2i.$

2.计算积分：

$$I=\int_L \mathrm{Re}z\,dz,$$

在这里L分别表示：(1)单位圆（按反时针方向从1到1取积分）；(2)从z_1沿直线段到z_2.

解：（1）如图3.2，

令 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$.

则 $\mathrm{Re}z=\cos\theta$,

$dz=(-\sin\theta+i\cos\theta)\mathrm{d}\theta$.

图3.2

所以 $\quad I=\int_0^{2\pi}\cos\theta(-\sin\theta+i\cos\theta)d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\left(-\cos\theta\sin\theta+i\frac{1+\cos2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$=\left[-\frac{\sin^2\theta}{2}+i\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\sin2\theta}{4}\right)\right]_0^{2\pi}=\pi i.$$

(2) 设连接$z_1=x_1+iy_1$，$z_2=x_2+iy_2$两点的直线段方程是：

$$z=z_1+(z_2-z_1)t,\quad 0\leqslant t\leqslant 1.$$

则　$\operatorname{Re}z=x_1+(x_2-x_1)t$，$dz=(z_2-z_1)dt$。

所以　$$I=\int_0^1\left[x_1+(x_2-x_1)t\right](z_2-z_1)dt$$

$$=\frac{1}{2}(z_2-z_1)(x_2+x_1).$$

3.设函数$f(z)$当$|z-z_0|>r_0(0<r_0<r)$时是连续的，令 $M(r)$ 表示$|f(z)|$在$|z-z_0|=r>r_0$上的最大值，并且假定，

$$\lim_{r\to+\infty}rM(r)=0.$$

试证明，

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{k_r}f(z)dz=0.$$

在这里 k_r 是圆 $|z-z_0|=r$。

证：$\because f(z)$在$|z-z_0|>r_0$内连续，又k_r的半径$r>r_0$。

$\therefore$　积分$\int_{k_r}f(z)dz$存在。

于是根据积分的基本性质（5），有：

$$\left|\int_{k_r}f(z)dz\right|\leqslant M(r)\cdot 2\pi r=2\pi[rM(r)].$$

而　$\lim\limits_{r\to+\infty}rM(r)=0$，故由上式即得：

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{k_r}f(z)dz=0.$$

4.如果满足上题中条件的函数$f(z)$还在$|z-z_0|>r_0$内

解析，那么对任何 $r>r_0$，

$$\int_{k_r} f(z)dz=0.$$

证：任取 r_1, r，使 $r_1>r>r_0>0$。由假设可知 $f(z)$ 在 k_{r_1} 与 k_r 所围成的闭圆环域上解析，故由多连通区域的柯西定理，得：

$$\int_{k_r} f(z)dz=\int_{k_{r_1}} f(z)dz.$$

令 $r_1\to\infty$，则由上题的结果可得：

$$\int_{k_r} f(z)dz=\lim_{r_1\to+\infty}\int_{k_{r_1}} f(z)dz=0.$$

即对任何 $r>r_0$，有：

$$\int_{k_r} f(z)dz=0.$$

5．计算积分：

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^4-1}.$$

解法一（利用上题结果），显然 $f(z)=\dfrac{1}{z^4-1}$ 在 $|z|>1$ 内解析，且在圆 k_r：$|z|=r>1$ 上有：

$$|f(z)|=\frac{1}{|z^4-1|}\leqslant\frac{1}{|z^4|-1}=\frac{1}{r^4-1}.$$

$\therefore\quad 0\leqslant M(r)\leqslant\dfrac{1}{r^4-1}$，$0\leqslant\lim\limits_{r\to+\infty} rM(r)\leqslant\lim\limits_{r\to+\infty}\dfrac{r}{r^4-1}=0.$

利用第 4 题的结果，即得：

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^4-1}=0.$$

解法二（利用多连通区域的柯西定理和柯西公式），方程 $z^4-1=0$ 的根为 $z_1=1$，$z_2=i$，$z_3=-1$，$z_4=-i$。

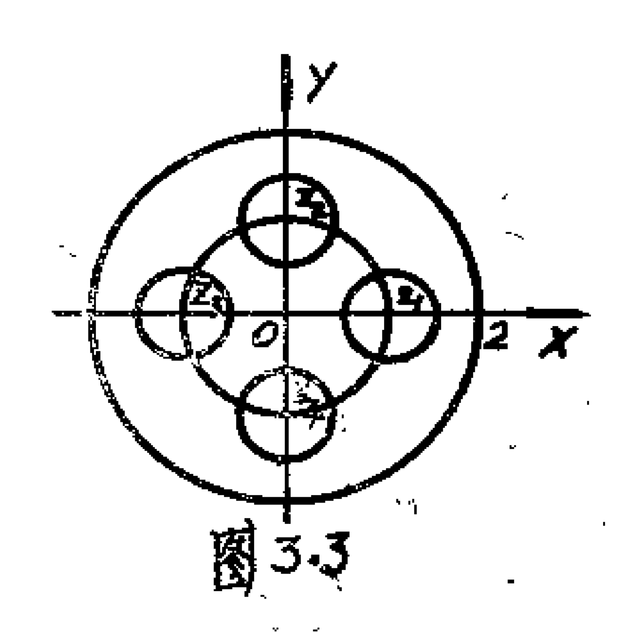


图3.3

如图3.3，取 r 使分别作出的互不相交的小圆 k_n：$|z-z_n|=r$ $(n=1,2,3,4)$，都包含在 $|z|=2$ 内。

显然，$f(z)=\dfrac{1}{z^4-1}$ 在由 $|z|=2$ 和 $k_n(n=1,2,3,4)$ 为边界的闭区域上解析，故得：

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^4-1}=\sum_{n=1}^{4}\int_{k_n}\frac{dz}{z^4-1}. \qquad (1)$$

因为 $\dfrac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}$ 在闭圆盘 k_1：$|z-z_1|\leqslant r$ 上解析，故由柯西公式，得：

$$\int_{k_1}\frac{dz}{z^4-1}=\int_{k_1}\frac{\dfrac{1}{(z-z_2)(z-z_3)(z-z_4)}}{z-z_1}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(z_1-z_4)}$$

$$=\frac{2\pi i}{(1-i)(1+1)(1+i)}=\frac{\pi i}{2}.$$

同样求得：

$$\int_{k_2} \frac{dz}{z^4-1} = -\frac{\pi}{2}, \qquad \int_{k_3} \frac{dz}{z^4-1} = -\frac{\pi i}{2}.$$

$$\int_{k_4} \frac{dz}{z^4-1} = \frac{\pi}{2}.$$

代入（1）式，得：

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^4-1} = 0.$$

6．设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 在单连通区域 D 内解析，α 及 β 是 D 内两点，证明：

$$\int_\alpha^\beta f(z)g'(z)dz = f(z)g(z)\Big|_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f'(z)g(z)dz$$

（分部积分公式），在这里从 α 到 β 的积分是沿 D 内连接 α 及 β 的一条简单曲线取的。

证：∵ $f(z)$ 及 $g(z)$ 在单连通区域 D 内解析，

∴ $f(z)\cdot g(z)$ 和 $[f(z)\cdot g(z)]'$ 也都在单连通域 D 内解析，且有：

$$[f(z)\cdot g(z)]' = f'(z)\cdot g(z) + f(z)\cdot g'(z).$$

根据用原函数求解析函数的积分公式和积分的性质，得：

$$\int_\alpha^\beta f'(z)\cdot g(z)dz + \int_\alpha^\beta f(z)\cdot g'(z)dz$$

$$= \int_\alpha^\beta [f(z)\cdot g(z)]'dz = f(z)\cdot g(z)\Big|_\alpha^\beta$$

所以 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(z)\cdot g'(z)dz = f(z)\cdot g(z)\Big|_\alpha^\beta -$

$$-\int_\alpha^\beta f'(z)\cdot g(z)dz.$$

7．计算积分

（1）$I=\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$；（2）$I=\int_C \ln z dz$。

在这里用C表示单位圆（按反时针方向从1到1取积分），而被积函数分别取为按下列条件决定的解析分枝：

（1）$\sqrt{1}=1$ 及 $\sqrt{1}=-1$；

（2）$\ln 1=0$ 及 $\ln 1=2\pi i$。

解：（1）按条件 $\sqrt{1}=1$ 及所规定的积分路线，取如下的解析分枝：

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,e^{i\frac{\arg z}{2}} \quad 其中\ 0\leqslant\arg z<2\pi。$$

在单位圆上，令 $z=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。

于是 $$I=\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_C\frac{dz}{e^{i\frac{\arg z}{2}}}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}ie^{i\frac{\theta}{2}}d\theta=2e^{i\frac{\theta}{2}}\Big|_0^{2\pi}=-4。$$

按条件 $\sqrt{1}=-1$ 及所规定的积分路线，取如下的解析分枝：

$$\sqrt{z}=\sqrt{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2\pi}{2}}，\quad 其中0\leqslant\arg z<2\pi。$$

在单位圆上，令 $z=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$

于是 $$I=\int_C\frac{dz}{\sqrt{z}}=\int_C\frac{dz}{e^{i\frac{\arg z+2\pi}{2}}}=\int_0^{2\pi}\frac{ie^{i\theta}}{e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}}d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi} ie^{i\frac{\theta-2\pi}{2}}d\theta=-\int_0^{2\pi} ie^{i\frac{\theta}{2}}d\theta=4.$$

（2）按条件 $\ln 1=0$ 及所规定的积分路线，取如下的解析分枝：

$\ln z=\ln|z|+i\arg z$，其中 $0\leqslant\arg z<2\pi$。

在单位圆上，令 $z=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。

于是 $I=\int_c \ln z\,dz=\int_0^{2\pi}(i\theta)ie^{i\theta}d\theta=-\int_0^{2\pi}\theta e^{i\theta}\,d\theta$

$$=e^{i\theta}(i\theta-1)\Big|_0^{2\pi}=2\pi i.$$

按条件 $\ln 1=2\pi i$ 及所规定的积分路线，取如下的解析分枝：

$\ln z=\ln|z|+i\arg z+2\pi i$，其中 $0\leqslant\arg z<2\pi$。

在单位圆上，令 $z=e^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$。

于是 $I=\int_c \ln z\,dz=\int_0^{2\pi}(i\theta+2\pi i)ie^{i\theta}\,d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}(-\theta e^{i\theta}-2\pi e^{i\theta})d\theta$$

$$=[e^{i\theta}(i\theta-1)+2\pi ie^{i\theta}]_0^{2\pi}=2\pi i.$$

8.如果积分路线不经过点 $\pm i$，那么：

$$\int_0^1\frac{dz}{1+z^2}=\frac{\pi}{4}+k\pi\qquad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

证：设积分路线是依正方向环绕点 i 而不环绕点 $-i$，绕行一次的简单闭曲线 C_1，则：

$$\int_{C_1}\frac{dz}{1+z^2}=\pi.$$

设积分路线是依正方向环绕点 $-i$ 而不环绕 i，绕行一次的简单闭曲线 C_2，则：

$$\int_{C_2}\frac{dz}{1+z^2}=-\pi.$$

设积分路线是依正方向同时环绕点 i 和点 $-i$ 一次的简单闭曲线 C_3，则：

$$\int_{C_3}\frac{dz}{1+z^2}=0.$$

因此，如积分路线环绕点 i 或点 $-i$ 依正方向或负方向绕行 k 次时，积分值应为 $\pm k\pi$。而积分路线同时环绕点 i 和点 $-i$ 时，不论绕行多少次，积分值总为零。

设积分路线是连接0及1但不通过也不环绕 $\pm i$ 简单的曲线 γ，则：

$$\int_\gamma\frac{dz}{1+z^2}=\int_0^1\frac{dz}{1+z^2}=\operatorname{arc\,tg} z\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}.$$

设积分路线是连接0及1但不通过 $\pm i$ 的简单曲线 Γ，则 Γ 可看做是绕行 C_1 这样的曲线 k_1 次，绕行 C_2 这样的曲线 k_2 次，绕行 C_3 这样的曲线 k_3 次，然后再沿 γ 这样的曲线进行的路线，因此：

$$\int_\Gamma\frac{dz}{1+z^2}=\underset{(k_1\text{次})}{\int_{C_1}}\frac{dz}{1+z^2}+\underset{(k_2\text{次})}{\int_{C_2}}\frac{dz}{1+z^2}+\underset{(k_3\text{次})}{\int_{C_3}}\frac{dz}{1+z^2}+\int_\gamma\frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots).$$

9.证明：

(1) $\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| \leqslant 2$，$C$为联$-i$到$i$的线段；

(2) $\left|\int_C (x^2+iy^2)dy\right| \leqslant \pi$，$C$为右半单位圆$|z|=1$，$\text{Re}z \geqslant 0$；

(3) $\left|\int_C \frac{dz}{z^2}\right| \leqslant 2$，$C$为联$i$到$i+1$的线段。

证：(1)在C上，$z=iy$，$-1\leqslant y\leqslant 1$，即 $|y|\leqslant 1$，$dz=idy$。于是有：

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dz\right| = \left|\int_{-1}^{1} iy^2 i dy\right| \leqslant \int_{-1}^{1} |y|^2 dy$$
$$\leqslant \int_{-1}^{1} dy = 2.$$

(2) 在C上，令$z=e^{i\theta}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则

$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$，$dy=\cos\theta\, d\theta$。于是有：

$$\left|\int_C (x^2+iy^2)dy\right| = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta+i\sin^2\theta)\cos\theta\, d\theta\right|$$

$$\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos^2\theta+i\sin^2\theta||\cos\theta|d\theta$$

$$\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\, d\theta$$

$$\leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta+\sin^4\theta}\, d\theta$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \pi.$$

(3) 在C上，令$z = x + i$，　$0 \leqslant x \leqslant 1$。则　$dz = dx$。
于是有：

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2}\right| = \left|\int_0^1 \frac{dx}{(x+i)^2}\right| \leqslant \int_{-1}^{1} \frac{dx}{|x+i|^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} < 2.$$

10。设 $f(z)$ 在原点的邻域内连续。那么

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(0).$$

证：因 $f(z)$ 在原点的邻域内连续，故对任给的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使当 $|z| < \delta$ 时，有：

$$|f(z) - f(0)| < \varepsilon.$$

今取 $r < \delta$，$z = re^{i\theta}$，则由 $|z| = |re^{i\theta}| = r < \delta$，可得：

$$\left|\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta - 2\pi f(0)\right| \leqslant \int_0^{2\pi} \left|f(re^{i\theta}) - f(0)\right| d\theta$$

$$< \varepsilon \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\varepsilon.$$

由于 ε 是任意小的正数，故有：

$$\lim_{r \to 0} \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\, d\theta = 2\pi f(0).$$

11。计算积分

(1) $\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z} dz$；　　(2) $\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+2}$；

(3) $\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2}$，　　(4) $\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}$

解：(1)由柯西公式，得：

$$\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z-0}dz=2\pi ie^z\Big|_{z=0}=2\pi i。$$

(2) 函数 $\frac{1}{z^2+2}$ 在 $z=\pm\sqrt{2}\,i$ 处不解析，如图 3．4，在 $|z|=2$ 的内区域分别以 $\pm\sqrt{2}\,i$ 为心作两个圆 c_1 c_2，那么函数 $\frac{1}{z^2+2}$ 在由 $|z|=2$，c_1 和 c_2 所围成的闭区域上解析，根据关于多连通区域的柯西定理，得：

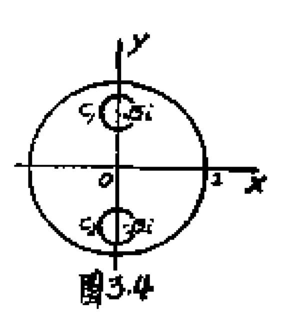


图3.4

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+2}=\int_{c_1}\frac{dz}{z^2+2}+\int_{c_2}\frac{dz}{z^2+2}\qquad(*)$$

又由柯西公式，得：

$$\int_{c_1}\frac{dz}{z^2+2}=\int_{c_1}\frac{\frac{1}{z+\sqrt{2}i}}{z-\sqrt{2}i}dz=\frac{2\pi i}{z+\sqrt{2}i}\Bigg|_{z=\sqrt{2}i}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}。$$

同理可得：　$\int_{c_2}\frac{dz}{z^2+2}=-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$。

故由（*）式，得：

$$\int_{|z|=2}\frac{dz}{z^2+2}=0。$$

(3) 因 $\dfrac{1}{z^2+2}$ 在$|z|\leqslant 1$上解析，故由柯西定理，得：

$$\int_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2}=0.$$

(4) 由柯西公式，得：

$$\int_{|z|=1}\frac{zdz}{(2z+1)(z-2)}=\int_{|z|=1}\frac{\dfrac{z}{2(z-2)}}{z-\left(-\dfrac{1}{2}\right)}dz$$

$$=2\pi i\left.\frac{z}{2(z-2)}\right\|_{z=-\frac{1}{2}}=\frac{1}{5}\pi i.$$

12. 证明：

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

在这里C是围绕原点的一条简单闭曲线

证：若令 $f(\zeta)=\dfrac{z^n}{n!}e^{z\zeta}$，则$f(\zeta)$ 在ζ平面上解析，

由解析函数的高阶导数公式，对于$z=0$，有：

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{z^n}{n!}e^{z\zeta}\frac{d\zeta}{\zeta^{n+1}}$$

即 $$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_c\frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta} \qquad (1)$$

这里C是一条绕原点的简单闭曲线。

由设 $f^{(n)}(\zeta)=\dfrac{z^n}{n!}z^n e^{z\zeta}$，故又有：

$$f^{(n)}(0)=\frac{(z^n)^2}{n!} \qquad (2)$$

从而由（1）和（2），得：

$$\left(\frac{z^n}{n!}\right)^2=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{n!\zeta^n}\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

13. 设 $f(z)=\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta$。

求 $f'(1+i)$。

解：设 $g(z)=3z^2+7z+1$，显然它在整个平面上解析。从而由柯西公式得：

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=3}\frac{3\zeta^2+7\zeta+1}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}f(z).$$

$$\therefore \quad f(z)=2\pi i g(z).$$

$$f'(z)=2\pi i g'(z).$$

而 $g'(1+i)=6(1+i)+7=13+6i$，

$$\therefore \quad f'(1+i)=2\pi i(13+6i)=2\pi(-6+13i).$$

14. 通过计算 $\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}$，

证明
$$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta=\begin{cases}2\pi\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)} & 当n=2k时；\\ 0 & 当n=2k+1时。\end{cases}$$

证：设 $z=e^{i\theta}$ $(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，则：

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}=\int_0^{2\pi}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})^n i d\theta$$

$$=2^n i\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta \qquad (1)$$

又由解析函数的高阶导数公式，得：

$$\int_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^n\frac{dz}{z}=\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^n}{z^{n+1}}dz$$

$$=\frac{2\pi i}{n!}[(z^2+1)^n]^{(n)}{}_{z=0} \qquad (2)$$

由（1）和（2），得：

$$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta=\frac{2\pi}{2^n\cdot n!}[(z^2+1)^n]^{(n)}{}_{z=0} \qquad (3)$$

记$f(z)=(1+z^2)^n$。需要计算

$$f^{(n)}(0)==[(z^2+1)^n]^{(n)}{}_{z=0}$$

因为

$$f(z)=\begin{cases} z^{2n}+c_n^1z^{2n-2}+\cdots+c_n^kz^n+c_n^{k-1}z^{n-2}+\cdots+ \\ +c_n^n; \qquad \text{当} n=2k; \\ z^{2n}+c_n^1z^{2n-2}+\cdots+c_n^{\frac{n-1}{2}}z^{n+1}+c_n^{\frac{n+1}{2}}z^{n-1} \\ +\cdots+c_n^n; \qquad \text{当} n=2k+1 \end{cases}$$

（此处k为自然数）。它的展式的各项在$z=0$处的n阶导数除了：

$$\left(c_n^kz^n\right)^{(n)}_{z=0}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\cdot n!$$

外，均等于零，所以有：

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}\frac{2k(2k-1)\cdots(k+1)}{k!}\cdot n!, & n=2k; \\ 0, & n=2k+1.\end{cases}$$

把$f^{(n)}(0)$代入（3），则当$n=2k$时，得：

$$\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta=\frac{2\pi}{2^n\cdot n!}\frac{2k(2k-1)\cdots(k+1)}{k!}\cdot(n)!$$

$$=2\pi\cdot\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}=2\pi\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2k)}$$

而当$n=2k+1$时，得： $\int_0^{2\pi}\cos^n\theta d\theta=0$。

15．如果在$|z|<1$内，$f(z)$解析，并且$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}$

证明：$|f^{(n)}(0)|\leqslant(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e(n+1)!$

$(n=1,2,\cdots)$。

证：由于$f(z)$在$|z|<1$内解析，取积分路线C：

$|z|=\frac{n}{n+1}$，则由解析函数的高阶导数公式，得：

$$f^{(n)}(0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$$

从而由条件$|f(z)|\leqslant\frac{1}{1-|z|}$，并利用积分基本性质（5），得：

$$|f^{(n)}(0)|=\left|\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|$$

$$\leqslant\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\cdot2\pi\cdot\frac{n}{n+1}$$

$$=(n+1)!\frac{(n+1)^n}{n^n}=(n+1)!\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$<e(n+1)! \qquad (n=1,\ 2,\cdots)。$$

16. 证明：设$\varphi(\zeta)$在一条简单曲线C上连续，这里C不一定是闭的，那么在不含C上的点的任何区域D内，函数

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

解析，并且有任意阶导数：

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\qquad(n=1,\ 2,\cdots).$$

确定$\Phi(z)$的积分称为柯西型积分，在这里即使C是闭的，沿C的积分也不一定是按反时针方向取的。

证：用数学归纳法，证明

（1）当$n=1$时，$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z^2)}d\zeta$.

设z是D内任意取定的一点，$z+h$表示D内另一点，依定义，就是要证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h}=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

取差的绝对值：

$$\left|\frac{\Phi(z+h)-\Phi(z)}{h}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)}-\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{h\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|\qquad\cdots\quad(1)$$

$\because\ \varphi(\zeta)$在C上连续，$\therefore\ |\varphi(\zeta)|<M$，用$2d(d>0)$表示曲线$C$到点$z$的距离（就是$C$上所有的点与点$z$的距离的最小值），于是对于$C$上的任意一点$\zeta$，只要取$\zeta+h$，使$|h|<d$

就有$|\zeta-z|>d$，$|\zeta-z-h|>d$，于是有：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{h\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z-h)(\zeta-z)^2}\right|\leqslant\frac{|h|}{2\pi}\frac{Ml}{d^3} \qquad (2)$$

其中l为曲线C的长度。

从而(2)式的右边随$h\to0$而趋于零，于是(1)式右边的积分也随h一起趋于零。故当$n=1$时，结论成立。从而$\Phi(z)$在D内解析。

（2）假设$n=k$时，有：

$$\Phi^{(k)}(z)=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta.$$

证明$n=K+1$时，有：

$$\Phi^{(k+1)}(z)=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta.$$

也就是要证明：

$$\lim_{h\to0}\frac{\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)}{h}=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$

$$\because\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\varphi(\zeta)\left[\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}}-\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}}\right]d\zeta$$

$$=\frac{k!}{2\pi i}\int_C\varphi(\zeta)h\cdot\frac{1}{(\zeta-z-h)^{k+1}(\zeta-z)^{k+1}}\cdot$$

$$\cdot[(\zeta-z)^k+(\zeta-z)^{k-1}(\zeta-z-h)+$$

$$+\cdots+(\zeta-z-h)^k]d\zeta$$

$$\therefore\left|\frac{\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)}{h}-\frac{(K+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{k+2}}\right|$$

$$=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\left\{\frac{1}{(\zeta-z)^{k+1}(\zeta-z-h)^{k+1}}\cdot[(\zeta-z)^k+\right.\right.$$

$$\left.\left.+(\zeta-z)^{k-1}(\zeta-z-h)+\cdots+(\zeta-z-h)^k]-\frac{k+1}{(\zeta-z)^{k+2}}\right\}d\zeta\right|$$

$$=\left|\frac{k!}{2\pi i}\int_C \varphi(\zeta)\frac{1}{(\zeta-z)^{k+2}(\zeta-z-h)^{k+1}}\cdot\right.$$

$$\cdot[(\zeta-z)^{k+1}+(\zeta-z)^k(\zeta-z-h)+\cdots+$$

$$\left.+(\zeta-z)(\zeta-z-h)^k-(k+1)(\zeta-z-h)^{k+1}]\,d\zeta\right| \quad (3)$$

估计（3）式右端中被积函数的值．首先，和$n=1$时一样，有$|\varphi(\zeta)|<M$，$|\zeta-z|>d$，$|\zeta-z-h|>d$．其次，以原点为心作一个包含积分路线C及点z、$z+h$的圆盘$|z|\leqslant R$，则有$|\zeta-z|\leqslant 2R$，$|\zeta-z-h|\leqslant 2R$．

再把分子中的$-(k+1)\cdot(\zeta-z-h)^{k+1}$拆成$k+1$个$-(\zeta-z-h)^{k+1}$配到前面的$k+1$项上去，从而估计分子的值：

$$|[(\zeta-z)^{k+1}-(\zeta-z-h)^{k+1}]+[(\zeta-z)^k(\zeta-z-h)-$$

$$-(\zeta-z-h)^{k+1}]+\cdots+[(\zeta-z)(\zeta-z-h)^k-$$

$$-(\zeta-z-h)^{k+1}]|$$

$$=|h|\,|[(\zeta-z)^k+(\zeta-z)^{k-1}(\zeta-z-h)+\cdots+$$

$$+(\zeta-z-h)^k]+(\zeta-z-h)[(\zeta-z)^{k-1}+(\zeta-z)^{k-2}\cdot$$

$$\cdot(\zeta-z-h)+\cdots+(\zeta-z-h)^{k-1}]+\cdots+(\zeta-z-h)^k|$$

$$\leqslant|h|[(k+1)+k+\cdots+1](2R)^k=|h|\frac{(k+1)(k+2)}{2}(2R)^k$$

因此，（3）式右端中被积函数的绝对值不超过

$$M\cdot|h|\cdot\frac{(k+1)(k+2)(2R)^k}{2d^{2k+3}}.$$

从而（3）式右端不超过

$$\frac{k!}{2\pi}\cdot M\cdot|h|l\cdot\frac{(k+1)(k+2)(2R)^{k}}{2\cdot d^{2k+3}}$$ 显然，它随$h\to0$而趋于零。从而得：

$$\lim_{h\to0}\frac{\Phi^{(k)}(z+h)-\Phi^{(k)}(z)}{h}$$

$$=\frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+2}}d\zeta$$ 这就是所要证明的。

因此，有：

$$\Phi^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta\qquad(n=1,2,\cdots).$$

17. 如果$f(z)$在$|z-z_0|>r_0$内解析，并且$\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$，那么对任何正数$r>r_0$，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k_r}f(z)dz=A,$$

在这里kr是园$|z-z_0|=r$，积分是按反时针方向取的。

证：利用$\int_{k_r}\frac{dz}{z-z_0}=2\pi i$，得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k_r}f(z)dz-A=\frac{1}{2\pi i}\int_{k_r}\left[f(z)-\frac{A}{z-z_0}\right]dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{k_r}\left[\frac{zf(z)-A-z_0f(z)}{z-z_0}\right]dz$$

由 $\lim\limits_{z\to\infty}zf(z)=A$ 得 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，从而得：

$$\lim_{z\to\infty}[zf(z)-A-z_0f(z)]=0.$$

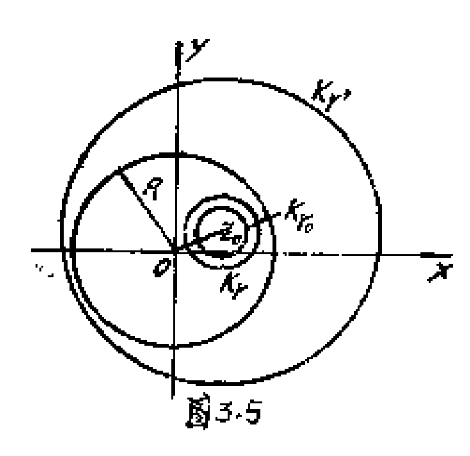


图3.5

因此，对任给的$\varepsilon>0$，存在$R>r_0+|z_0|$，使当$|z|>R$时，有：

$|zf(z)-A-z_0f(z)|<\varepsilon$。

于是，当$r'>|z_0|+R$即当$r'>r_0+2|z_0|$时，有：

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{k_{r'}}f(z)dz-A\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{k_{r'}}\left\{\frac{zf(z)-A-z_0f(z)}{z-z_0}\right\}dz\right|$$

$$<\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{r'}\cdot 2\pi r'=\varepsilon$$

故 $$\lim_{r'\to+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{k_{r'}}f(z)dz=A.$$

任意取定r使$r>r_0$，则按多连通区域的柯西定理，有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k_{r'}}f(z)dz=\int_{k_{r'}}f(z)dz.$$

令$r'\to+\infty$，两边取极限，得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k_{r'}}f(z)dz=\lim_{r'\to+\infty}\int_{k_{r'}}f(z)dz=A.$$

18．如果函数$f(z)$在简单闭曲线C的外区域D内及C上每一点解析，且

$\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=a$，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}-f(z)+a & (\text{当}z\in D\text{时}),\\ a & (\text{当}z\in C\text{的内区域时})\end{cases}$$

这里沿C的积分是按反时针方向取的。

证：对于任意取定的$z\in D$，取充分大的正数R_0，作圆周K_{R_0}：$|z|=R_0$，包含曲线C及点z，如图3.6，则依假设条件知$f(z)$在C与K_{R_0}所围的多连通区域G内及其边界上解析，根据柯西公式，得：

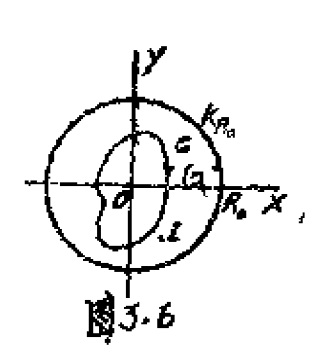


图3.6

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

其中C^-与C反向。

$$\therefore\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-f(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad (1)$$

设 $F(\zeta)=\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$，则$F(\zeta)$在$|\zeta|\geqslant R_0$上解析，

又$\because$ $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=a$。 $\therefore$ $\lim\limits_{\zeta\to\infty}\zeta F(\zeta)=\lim\limits_{\zeta\to\infty}\dfrac{f(\zeta)}{1-\dfrac{z}{\zeta}}=a$

故根据第17题证得的结果，对任何$R\geqslant R_0$，有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{K_R}F(\zeta)d\zeta=a,\quad \text{其中 } K_R:\ |\zeta|=R$$

再由柯西定理有

$$\int_{K_{R_0}}F(\zeta)d\zeta=\int_{K_R}F(\zeta)d\zeta.$$ 因此，由（1）式得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-f(z)+a.$$

又若$z\in C$的内区域，则$\dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}$在$\overline{G}$上解析，从而根据多连

通区域的柯西定理，有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_{K_{R_0}}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=a \qquad (2)$$

由（1）和（2）即得求证的结果。

第四章 级　　数

1. 设已给复数序列 $\{z_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=\zeta$，其中 ζ 是一有限复数，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\zeta$。

证法一：任给 $\varepsilon>0$。因 $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n=\zeta$，故存在正整数 $N_1=N_1(\varepsilon)$，使当 $n\geqslant N_1$ 时，有 $|z_n-\zeta|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，从而

$$\left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}-\zeta\right|=$$

$$=\left|\frac{(z_1-\zeta)+\cdots+(z_{N_1}-\zeta)}{n}+\frac{(z_{N_1+1}-\zeta)+\cdots+(z_n-\zeta)}{n}\right|$$

$$\leqslant\frac{|z_1-\zeta|+\cdots+|z_{N_1}-\zeta|}{n}+\frac{|z_{N_1+1}-\zeta|+\cdots+|z_n-\zeta|}{n}$$

$$\leqslant\frac{|z_1-\zeta|+\cdots+|z_{N_1}-\zeta|}{n}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\leqslant\frac{|z_1-\zeta|+\cdots+|z_{N_1}-\zeta|}{n}+\frac{\varepsilon}{2},$$ 对上述的 $\varepsilon>0$，总可找到 $N\geqslant N_1$，使当 $n\geqslant N$ 时，$\dfrac{|z_1-\zeta|+\cdots+|z_{N_1}-\zeta|}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$，由此可知，当 $n\geqslant N$ 时，就有

$$\left|\frac{z_1+z_2+\cdots+z_{N_1}+z_{N_1+1}+\cdots+z_n}{n}-\zeta\right|<\varepsilon$$

$\therefore\quad \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}=\zeta.$

证法二：设 $z_n=x_n+iy_n$ $(n=1,2,\cdots)$ ， $\zeta=x+iy$,

$\because\ \lim\limits_{n\to+\infty}z_n=\zeta$, $\therefore\ \lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$, $\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=y$, 于是有（参见吉林大学编《数学分析》中册 $p.$ 16）：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=x,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=y.$$

从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)+\cdots+(x_n+iy_n)}{n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}+i\lim_{n\to+\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

$=x+iy=\zeta$。

2．证明任何有界的复数序列一定有一个收敛的子序列。

证：设 $z_n=x_n+iy_n$, $|z_n|\leqslant M$ $(n=1,2,\cdots)$
因 $|x_n|$ 及 $|y_n|\leqslant|z_n|\leqslant M$, 故 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都有界。根据关于实数列的致密性定理，可知 $\{x_n\}$ 有收敛于某一常数 a 的子序列 $\{x_{n_k}\}$, 相应地，在 $z_{n_k}=x_{n_k}+iy_{n_k}$ $(k=1,2,\cdots)$ 中 $\{y_{n_k}\}$ 仍有界，因而 $\{y_{n_k}\}$ 也有一收敛于某一常数 b 的子序列 $\{y_{n_{k_j}}\}$, 又在 $z_{n_{k_j}}=x_{n_{k_j}}+iy_{n_{k_j}}$ $(j=1,2,\cdots)$ 中，

$\{x_{n_{k_j}}\}$仍收敛于a，因此所设序列有一收敛于$a+ib$的子序列$\{z_{n_{k_j}}\}$。

3．如果复数项级数$\sum_{n=1}^{+\infty} z'_n$（1）及$\sum_{n=1}^{+\infty} z''_n$（2）绝对收敛，并且它的和分别是$\sigma'$及$\sigma''$，那么级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(z'_1 z''_n+z'_2 z''_{n-1}+\cdots+z'_n z''_1) \qquad (3)$$

也绝对收敛，并且它的和是$\sigma'\cdot\sigma''$。

证：作级数（1）和（2）的所有各项中各取一项的乘积，如：

$$z'_1 z''_1,\ z'_1 z''_2,\ z'_2 z''_1,\ z'_1 z''_3,\ z'_2 z''_2,\ \cdots,$$

$z'_h z''_s,\cdots$，设按某种次序排列$z'_k z''_s(k,s=1,2\cdots)$所成的一个数列为：$w_1,w_2,\cdots,w_n,\cdots$，其中$w_k=z'_{n_k}\cdot z''_{m_k}$。

考虑级数 $|w_1|+|w_2|+\cdots+|w_n|+\cdots$，

设s^*_n为它的部分和：$S^*_n=\sum_{k=1}^{n}|w_k|=\sum_{k=1}^{n}|z'_{n_k} z''_{m_k}|$

记$\nu=max(n_1,m_1,n_2,m_2,\cdots,n_n,m_n)$。

$$\sigma^*_\nu=|z'_1|+|z'_2|+\cdots+|z'_\nu|,$$

$$\sigma^{**}_\nu=|z''_1|+|z''_2|+\cdots+|z''_\nu|.$$

因$\sum_{n=1}^{+\infty}z'_n$和$\sum_{n=1}^{+\infty}z''_n$绝对收敛，所以$\sigma^*_\nu$和$\sigma^{**}_\nu$均为有界，

而

$$s_n^* = |z'_{n_1} z''_{m_1}| + |z'_{n_2} z''_{m_2}| + \cdots + |z'_{n_n} z''_{m_n}|$$

$$\leqslant (|z'_1| + |z'_2| + \cdots + |z'_\nu|) \cdot$$

$$\cdot (|z''_1| + |z''_2| + \cdots + |z''_\nu|) = \sigma_\nu^* \sigma_\nu^{**}.$$

由此可知 s_n^* 也为有界，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 也绝对收敛，从而由 $z'_k z''_s$ $(k, s = 1, 2 \cdots)$，按照任何方式排列所构成的级数当然也包括级数(3)都绝对收敛，并且都收敛于同一和数。

为了要证明级数（3）的和为 $\sigma' \sigma''$，考虑由正方形法排列所构成的级数，并加括号如下：

$$z'_1 z''_1 + (z'_1 z''_2 + z'_2 z''_2 + z'_2 z''_1) +$$

$$+ (z'_1 z''_3 + z'_2 z''_3 + z'_3 z''_3 + z'_3 z''_2 + z'_3 z''_1) + \cdots, \quad (4)$$

若记级数（1）与（2）的部分和为 σ'_n，和 σ''_n，级数（4）的部分和为 A_n，则有 $A_n = \sigma'_n \sigma''_n$，于是

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \lim_{n \to \infty} (\sigma'_n \sigma''_n) = \lim_{n \to \infty} \sigma'_n \cdot \lim_{n \to \infty} \sigma''_n = \sigma' \sigma''.$$

由以上讨论可知级数（3）的和是 $\sigma' \cdot \sigma''$。

4．试证明：

1^0．设复平面点集 E 表示区域、闭区域或简单曲线。设 $f_n(z)$ 在集 E 上连续 $(n = 1, 2, \cdots)$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$

在E上一致收敛于$f(z)$，那末$f(z)$在E上连续。

2°. 设$f_n(z)$在简单曲线C上连续（$n=1, 2, \cdots$），并且级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$C$上一致收敛于$f(z)$。那末

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \int_C f_n(z)dz = \int_C f(z)dz.$$

证：1° 任意取定$z_0 \in E$，记$S_n(z)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$。由于$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$在$E$上一致收敛于$f(z)$，故对于任给$\varepsilon>0$，可以找到一个与$z$无关的正整数$N=N(\varepsilon)$，当$n \geqslant N(\varepsilon)$，$z \in E$时，有$|f(z)-S_n(z)|<\frac{\varepsilon}{3}$，对于这个确定的$N$，$S_N(z)=\sum_{k=1}^{N} f_k(z)$是有限多个在点$z_0$处连续函数之和，因而它在$z_0$处也连续，所以对上述$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，使当$|z-z_0|<\delta$时，不等式$|S_N(z)-S_N(z_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$ （2）恒成立。

由（1）和（2）可知，当$|z-z_0|<\delta$时，

$$|f(z)-f(z_0)| \leqslant |f(z)-S_N(z)|+|S_N(z)-S_N(z_0)|+ \\ +|S_N(z_0)-f(z_0)|>\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以$f(z)$在z_0连续，由于z_0是E上任意一点，所以$f(z)$在E上连续。

2^0. 记$S_n(z)=\sum_{k=1}^{n} f_k(z)$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ 在C上一致收敛于$f(z)$，所以任给$\varepsilon>0$，必有$N=N(\varepsilon)$，使当$n\geqslant N$，$z\in C$ 时，$|f(z)-S_n(z)|<\varepsilon$，从而

$$\left|\int_c f(z)dz-\int_c S_n(z)dz\right|=$$

$$=\left|\int_c [f(z)-S_n(z)]dz\right|\leqslant\varepsilon\cdot L,$$

其中L为曲线C的长度。于是有。

$$\int_c f(z)dz=\lim_{n\to\infty}\int_C S_n(z)dz=\lim_{n\to\infty}\left\{\int_C\left(\sum_{k=1}^{n} f_k(z)\right)dz\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)dz\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\int_C f_n(z)dz.$$

5．试求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n$；其中 $|q|<1$。

解：$\because l=\lim_{n\to\infty}|q|^n=0$，$\therefore R=+\infty$

（2）$\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$。

解：级数的系数 $a_k=\begin{cases}1, & 当\ k=n! \\ 0, & 当\ k\neq n!\end{cases}$ $(k=1, 2, \cdots)$

$\therefore l=\lim\sqrt[n]{|a_n|}=1$，$\therefore R=1$。

（3）$\sum_{n=0}^{\infty} n^p z^n$，其中 p 是一正整数；

解：$\because l=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^p}=\lim\limits_{n\to\infty}(n^p)^{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}})^p=1$

$\therefore\ R=1$。

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n$；

解：$\because l=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{[3+(-1)^n]^n}=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}[3+(-1)^n]=4$

$\therefore\quad R=\dfrac{1}{4}$。

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}z^n$；

解：$\because\quad l=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{n!}{n^n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n+1)^n}=\dfrac{1}{e}$。

$\therefore R=e$。

（6）$1+\dfrac{ab}{c}z+\dfrac{a(a+1)b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2+\cdots+$

$+\dfrac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n+\cdots$

其中 a，b，c 是复数，但 c 不是零或负整数。

解：$\because\quad l=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a+n)(b+n)}{(n+1)(c+n)}=$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{a}{n}\right)\left(1+\frac{b}{n}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{c}{n}\right)}=1,\quad\therefore R=1.$$

6. 设在 $|z|<R$ 内解析的函数 $f(z)$ 有泰勒展式：

$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots$。

试证：（1）令 $M(r)=max|f(re^{i\theta})|$）$(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$，我们有：

$$|a_n|\leqslant\frac{M(r)}{r^n}\qquad\text{（柯西不等式）},$$

在这里 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 0<r<R$。

（2）由（1）证明刘维尔定理。

（3）当 $0\leqslant r<R$ 时，

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2r^{2n}.$$

证：（1）$\because\ a_n=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_c\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta,\ n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$

其中 C：$|z|=r<R$，在 C 上，$|f(re^{i\theta})|\leqslant M(r)$，

于是有：

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_c\frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}}d\zeta\right|\leqslant\frac{M(r)}{2\pi r^{n+1}}\cdot2\pi r=\frac{M(r)}{r^n}.$$

（2）证法一（利用（1）中柯西不等式）。

设 $f(z)$ 在 z 平面上解析，则泰勒展式

$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots$

对于 z 平面上每一点 z 都成立，又因为 $f(z)$ 有界，所以存在常数 $M>0$，使 $|f(z)|\leqslant M$，于是由（1）中的柯西不等式，得 $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{R^n}\qquad(n=0,\ 1,\ 2\cdots)$

因为R可以任意大，故当 $n\geqslant1$ 时，令 $R\to+\infty$，对上式两边取极限，即有 $|a_n|\leqslant0$，所以 $a_n=0$，从而 $f(z)=a_0$，即 $f(z)$ 为常数。

证法二：在 z 平面任取 z_1，z_2，作以原点为心以大于 $|z_1|$ 与 $|z_2|$ 的 R 为半径的圆 C，则由柯西公式可得：

$$|f(z_1)-f(z_2)|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_1}dz-\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(z)}{z-z_2}dz\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{z_1-z_2}{(z-z_1)(z-z_2)}f(z)dz\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{|z_1-z_2|MR}{(R-|z_1|)(R-|z_2|)}$$

右方随 $R\to\infty$ 而趋于零，故 $f(z_1)=f(z_2)$，由 z_1，z_2 的任意性，可知 $f(z)$ 为常数。

（3）在圆盘 $|z|<R$ 内作圆 C：$z=re^{i\theta}$，其中 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$，$0<r<R$，于是

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta} \qquad (1)$$

$$\overline{f(z)}=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m}\ \overline{z^m}=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a}_mr^me^{-im\theta} \qquad (2)$$

$$\left|f(z)\right|^2=f(z)\overline{f(z)}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\sum_{m=0}^{\infty}\overline{a_m}r^me^{-im\theta}.$$

因为（1）（2）两式右端的级数都绝对一致收敛，故可按任意规则相乘，乘积级数在 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 上一致收敛，故可在此区间上逐项积分。注意到对应于 $m\neq n$ 的各项积分都等于零，故有

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f(re^{i\theta})\right|^2d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{a_n}\,r^{2n}\int_0^{2\pi}d\theta$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2 r^{2n}.$$

7．证明：如果 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在 $|z|\leqslant r$ 上绝对一致收敛，$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n z^n$ 在 $|z|<\rho$ 内收敛，其中 $0<r$ 及 $\rho<+\infty$，那么在 $|z|<\rho r$ 内，

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n z^n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}f(\zeta)g\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}.$$

证：由条件可知，$\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ 在 $|\zeta|=r$ 上绝对一致收敛，又当 $|z|<\rho r$ 时．在 $|\zeta|=r$ 上，$\left|\frac{z}{\zeta}\right|<\rho$．

故对于满足上条件的确定的 z，$g\left(\frac{z}{\zeta}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k$

在 $|\zeta|=r$ 上绝对一致收敛，故以上两级数的乘积在 $|\zeta|=r$ 上可逐项积分，又注意到 $n\neq k$ 时，对应的各项积分都等于零，则有：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}f(\zeta)\,g\left(\frac{z}{\zeta}\right)\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n\sum_{k=0}^{\infty}b_k\left(\frac{z}{\zeta}\right)^k\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_n\zeta^n b_k\frac{z^k}{\zeta^k}\frac{d\zeta}{\zeta}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_n b_k z^k \int_{|\zeta|=r} \zeta^{n-k-1} d\zeta$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n .$$

即在 $|z|<\rho r$ 内，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=r} f(\zeta) g\left(\frac{z}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} .$$

8。设z是任一复数，证明 $|e^z-1| \leqslant e^{|z|}-1 \leqslant |z| e^{|z|}$.

证：$|e^z - 1| = \left| z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots \right|$

$$\leqslant |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots$$

$$= \left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots\right) - 1$$

$$= e^{|z|} - 1 \qquad (1)$$

$$e^{|z|} - 1 = |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots$$

$$= |z|\left(1 + \frac{|z|}{2!} + \frac{|z|^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$\leqslant |z|\left(1 + |z| + \frac{|z|^2}{2!} + \frac{|z|^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= |z| e^{|z|} \qquad (2)$$

由（1）和（2）即得：$|e^z - 1| \leqslant e^{|z|} - 1 \leqslant |z| e^{|z|}$.

9．求下列解析函数或多值函数的解析分枝 在 $z=0$ 的泰勒展式：

(1) $\sin^2 z$; (2) $e^z \cos z$; (3) $\frac{1}{2}\left(L_n \frac{1}{1-z}\right)^2$;

(4) $(2-z)^{\frac{3}{4}}$; (5) $\operatorname{tg} z$（计算到 z^5 的系数）。

解：(1) $\sin^2 z = \frac{1-\cos 2z}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2z)^{2n}}{(2n)!}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}z^{2n}}{(2n)!}, \quad (|z|<\infty).$$

(2) $e^z \cos z = \frac{1}{2}[e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}]$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1+i)z}{1!} + \frac{(1+i)^2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{(1+i)^n z^n}{n!} + \cdots\right) + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{(1-i)z}{1!} + \frac{(1-i)^2 z^2}{2!} + \cdots + \frac{(1-i)^n z^n}{n!} + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}[(1+i)^n + (1-i)^n]z^n$$

$(|z|<\infty)$.

(3) 多值函数 $\mathrm{Ln}\frac{1}{1-z}$ 在 $z=0$ 的邻域内可分出单值解析分枝，取当 $z=0$ 时它的值为0的那个分枝，并且记作 $\ln\frac{1}{1-z}$，则

$$\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{1-z}\right)^2 = \frac{1}{2}[\ln(1-z)]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n} + \cdots\right)\cdot\left(z + \right.$$

$$+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^2}{n}+\cdots\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(n-k)}\right]z^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)\right]z^n$$

$$=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)z^n. \qquad (|z|<1)$$

（4） $(2-z)^{\frac{3}{4}}=2^{\frac{3}{4}}\left(1-\frac{z}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

$$=2^{\frac{3}{4}}\left[1+\frac{3}{4}\left(-\frac{z}{2}\right)+\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)}{2!}\left(-\frac{z}{2}\right)^2+\right.$$

$$+\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)}{3!}\left(-\frac{z}{2}\right)^3+\cdots+$$

$$\left.+\frac{\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)\left(\frac{3}{4}-3\right)\cdots\left[\frac{3}{4}-(n-1)\right]}{n!}\left(-\frac{z}{2}\right)^n+\cdots\right]$$

$$=2^{\frac{3}{4}}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}-1\right)\left(\frac{3}{4}-2\right)\cdots\left(\frac{3}{4}-n+1\right)}{2^n\cdot n!}z^n\right],$$

$$(|z|<2)$$

（5）解法一：

$(\mathrm{tg}\, z)_{z=0}=0$, $\qquad a_0=0$;

$(\mathrm{tg}\, z)'_{z=0}=1$, $\qquad a_1=1$;

$$(\operatorname{tg} z)''_{z=0}=0,\qquad a_2=0;$$

$$(\operatorname{tg} z)'''_{z=0}=2,\qquad a_3=\frac{1}{3};$$

$$(\operatorname{tg} z)^{(4)}_{z=0}=0,\qquad a_4=0;$$

$$(\operatorname{tg} z)^{(5)}_{z=0}=16,\qquad a_5=\frac{2}{15};$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg} z=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots\qquad\left(|z|<\frac{\pi}{2}\right)$$

解法二： $$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}=\frac{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots}{1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\cdots}$$

$$=z+\frac{1}{3}z^3+\frac{2}{15}z^5+\cdots$$

10. 设 $f(z)$ 是一整函数，并且假定存在着一个正整数 n，以及两个正数 R 及 M，使得当 $|z|\geqslant R$ 时，$|f(z)|\leqslant M|z|^n$。证明 $f(z)$ 是一个至多 n 次的多项式或一常数。

证：$\because$ $f(z)$ 是整函数，

$$\therefore\quad f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_kz^k+\cdots,$$

$$(|z|<+\infty).$$

由假定，存在正整数 n 和两个正数 R 及 M，使当 $|z|\geqslant R$ 时，$|f(z)\leqslant M|z|^n$。

任取 $R_1\geqslant R$，作圆 C_{R_1}：$|z|=R_1$，于是：

$$|a_k|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{R_1}}\frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}}d\zeta\right|\leqslant\frac{1}{2\pi}\ \frac{M\cdot R_1^n}{R_1^{k+1}}\cdot 2\pi R_1$$

$$=MR_1^{n-k}.$$

当$k>n$时，令$R_1\to+\infty$，有 $\lim\limits_{R_1\to\infty} MR_1^{n-k}=0$.

从而$a_k=0$，($k=n+1$，$n+2$，$\cdots$)。因此

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n.$$

其中 n 是一正整数，这就表明，$f(z)$是一个至多 n 次的多项式或一常数。

11．求下列解析函数或多值函数的解析分枝在指定区域内的罗朗展式：

（1） $\dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$ 在$0<|z|<1$内；

（2） $\dfrac{1}{(z^6-1)(z-3)}$ 在$1<|z|<3$内；

（3） $\sin\dfrac{z}{z-1}$ 在$0<|z-1|<1$内；

（4） $e^{\frac{z}{z+2}}$ 在$2<|z|<+\infty$内；

（5） $\dfrac{1}{z^a(1+z)}$ 在$0<|z+1|<1$内，其中$0<a<1$；

（6） $\dfrac{Lnz}{z^2-1}$ 在$0<|z-1|<1$及$0<|z+1|<1$内。

解：（1）在$0<|z|<1$内，

$$\frac{e^z}{z(z^2+1)}=\frac{1}{z}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nz^{2n}\Big)$$

$$=\frac{1}{z}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\Big)\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{\frac{n}{2}}\Big[\frac{1+(-1)^n}{2}\Big]z^n\Big\}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{\frac{k}{2}}\left[\frac{1+(-1)^{k}}{2}\right]\frac{1}{(n-k)!}\right\}z^{n-1}$$

（2）在$1<|z|<3$内，$\dfrac{1}{(z^{5}-1)(z-3)}$

$$=\frac{-1}{3z^{5}}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{z^{5}}\right)\left(1-\frac{z}{3}\right)}$$

$$=\frac{-1}{3z^{5}}\left(1+\frac{1}{z^{5}}+\frac{1}{z^{10}}+\cdots+\frac{1}{z^{5n}}+\cdots\right)\cdot$$

$$\cdot\left(1+\frac{z}{3}+\frac{z^{2}}{3^{2}}+\cdots+\frac{z^{n}}{3^{n}}+\cdots\right)$$

$$=\frac{-1}{3z^{5}}\left[\cdots+\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5n}}+\right.$$

$$+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5n-1}}+$$

$$+\frac{1}{3^{2}}\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5n-2}}+$$

$$+\frac{1}{3^{3}}\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5n-3}}+$$

$$+\frac{1}{3^{4}}\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5n-4}}+\cdots+$$

$$+\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5}}+$$

$$+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5-1}}+$$

$$+\frac{1}{3^{2}}\left(1+\frac{1}{3^{5}}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5-2}}+$$

$$+\frac{1}{3^3}\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5-3}}+$$

$$+\frac{1}{3^4}\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\frac{1}{z^{5-4}}+$$

$$+\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)+$$

$$+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)z+$$

$$+\frac{1}{3^2}\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)z^2+\cdots+$$

$$\left.+\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)z^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{-1}{3z^5}\left(1+\frac{1}{3^5}+\cdots+\frac{1}{3^{5l}}+\cdots\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\cdots+\frac{1}{z^{5n}}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^{5n-1}}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{z^{5n-2}}+\right.$$

$$+\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{z^{5n-3}}+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{z^{5n-4}}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z^{5-1}}+\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{z^{5-2}}+\frac{1}{3^3}\cdot\frac{1}{z^{5-3}}+$$

$$\left.+\frac{1}{3^4}\cdot\frac{1}{z^{5-4}}+1+\frac{z}{3}+\frac{z^2}{3^2}+\cdots+\frac{z^n}{3^n}+\cdots\right]$$

$$=-\frac{81}{242z^5}\left[\cdots+\left(\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{z^{5n-k}}\right)+\cdots+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{z^{5-k}}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}\right]$$

$$=-\frac{81}{242z^5}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{z^{5n-k}}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^n}\right]$$

$$= -\frac{81}{242}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{z^{5(n+1)-k}}\right)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{3^{n+5}}\right].$$

（3）在$0<|z-1|<1$内

$$\sin\frac{z}{z-1}=\sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$=\sin 1\cdot\cos\frac{1}{z-1}+\cos 1\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n)!(z-1)^{2n}}+\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{1+(-1)^n}{2}\sin 1+\right.$$

$$\left.+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{1+(-1)^{n-1}}{2}\cos 1\right]\cdot\frac{1}{n!(z-1)^n}.$$

（4）在$0<|z|<+\infty$内，$e^{\frac{z}{z+2}}=e^{\frac{1}{1+\frac{2}{z}}}=e^{(1+\frac{2}{z})^{-1}}$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{2}{z}\right)^{-n},$$

而$\left(1+\frac{2}{z}\right)^{-n}=1-C_n^1\frac{2}{z}+C_{n+1}^2\frac{2^2}{z^2}+$

$$+\cdots+(-1)^kC_{n+k}^k\frac{2^k}{z^k}+\cdots$$

故$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(1+\frac{2}{z}\right)^{-n}=1+\frac{1}{1!}-\frac{1}{1!}\cdot\frac{2}{z}+\frac{1}{1!}\cdot\frac{2^2}{z^2}-$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{1}{1!}\cdot\frac{2^k}{z^k}+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2!}-\frac{1}{2!}C_2^1\frac{2}{z}+\frac{1}{2!}C_3^2\frac{2^2}{z^2}-\cdots+(-1)^k\frac{1}{2!}C_{k+1}^k\frac{2^k}{z^k}$$

$$+\cdots+\frac{1}{3!}-\frac{1}{3!}C_3^1\frac{2}{z}+\frac{1}{3!}C_4^2\frac{2^2}{z^2}+\cdots+(-1)^k\frac{1}{3!}C_{k+2}^k\frac{z^k}{2^k}+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}-\frac{1}{n!}C_n^1\frac{2}{z}+\frac{1}{n!}C_{n+1}^2\frac{2^2}{z^2}-$$

$$-\cdots+(-1)^k\frac{1}{n!}C_{n+k-1}^k\frac{2^k}{z^k}+\cdots$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}\left[(-1)^k2^k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}C_{n+k-1}^k\right)\right]\frac{1}{z^k}.$$

（5）多值函数 z^a 在 $|z+1|<1$ 的邻域内可分出解析分枝，取 $z=-1$ 时，它为 $e^{-a\pi i}$ 的那一枝，并记为 $(z^a)_0$，则在 $0<|z+1|<1$ 内 $(0<a<1)$ 有

$$\frac{1}{(z^a)_0(1+z)}=\frac{(-1)^{-a}}{z+1}\cdot\frac{1}{[1-(1+z)]^a}$$

$$=\frac{e^{-a\pi i}}{z+1}[1-(1+z)]^{-a}$$

$$=\frac{e^{-a\pi i}}{z+1}\left[1+(-a)(z+1)+\frac{(-a)(-a-1)}{2!}(z+1)^2+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{(-a)(-a-1)\cdots(-a-n+1)}{n!}(z+1)^n+\cdots\right]$$

$$=\frac{e^{-a\pi i}}{z+1}\left[a^0+ae^{-\pi i}(z+1)+\frac{a(a+1)}{2!}e^{-2\pi i}\cdot(z+1)^2+\right.$$

$$\left.+\cdots+\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!}e^{-n\pi i}\cdot(z+1)^n+\cdots\right]$$

$$= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} + \frac{a}{1!} e^{(-a-1)\pi i} + \frac{a(a+1)}{2!} e^{(-a-2)\pi i}(z+1) + \cdots +$$

$$+ \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} e^{(-a-n)\pi i}(z+1)^{n-1} + \cdots$$

$$= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} + \frac{a}{1!} e^{-(a+1)\pi i} + \frac{a(a+1)}{2!} e^{-(a+2)\pi i}(z+1) +$$

$$+ \cdots + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} e^{-(a+n)\pi i}(z+1)^{n-1} + \cdots$$

$$= \frac{e^{-a\pi i}}{z+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)}{n!} e^{-(a+n)\pi i} \cdot (z+1)^{n-1}$$

（6）多值函数$\mathrm{Ln}z$在$|z-1|<1$内可分出解析函数分枝，取$\mathrm{Ln}1=0$那一分枝，并记此分枝为$\ln z$，则当$0<|z-1|<1$时，

$$\frac{\ln z}{z^2-1} = \frac{1}{z-1}\ln[1+(z-1)] \cdot \frac{1}{2\left(1+\frac{z-1}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{2(z-1)}\Big[(z-1) + (-1)\frac{(z-1)^2}{2} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(z-1)^n}{n} + \cdots\Big] \cdot \Big[1 + (-1)\frac{z-1}{2} +$$

$$+ (-1)^2\frac{(z-1)^2}{2^2} + \cdots + (-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n} + \cdots\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[1 + (-1)\frac{z-1}{2} + \frac{(-1)^2(z-1)^2}{3} +$$

$$+ \cdots + (-1)^{n-1}\frac{(z-1)^{n-1}}{n} + (-1)^n\frac{(z-1)^n}{n+1} + \cdots\Big] \cdot \Big[1 +$$

$$+(-1)\frac{z-1}{2}+(-1)^2\frac{(z-1)^2}{2^2}+\cdots+(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n}+\cdots\Big]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1^k)(z-1)^k}{k+1}\frac{(-1)^{n-k}(z-1)^{n-k}}{2^{n-k}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^n 2^k}{k+1}\right]\frac{(z-1)^n}{2^n}.$$

多值函数$\mathrm{Ln}z$在$|z+1|<1$内可分出解析函数分枝，取$\mathrm{Ln}(-1)=\pi i$的那一分枝，并记此枝为$\ln z$，则当$0<|z+1|<1$时，

$$\frac{\ln z}{z^2-1}$$

$$=\frac{1}{z+1}\Big\{\ln(-1)+\ln[1-(z+1)]\Big\}\frac{1}{(-2)(1-\frac{z-1}{2})}$$

$$=\frac{-1}{2(z+1)}\Big(\pi i-(z+1)-\frac{1}{2}(z+1)^2-\cdots-$$

$$-\frac{1}{n}(z+1)^n-\cdots\Big)\cdot\Big(1+\frac{z+1}{2}+\cdots+\frac{(z+1)^n}{2^n}+\cdots\Big)$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{-\pi i}{z+1}+1+\frac{1}{2}(z+1)+\cdots+\frac{1}{n}(z+1)^{n-1}+$$

$$+\frac{1}{n+1}(z+1)^n+\cdots\Big)\cdot\Big(1+\frac{z+1}{2}+\cdots+\frac{(z+1)^n}{2^n}+\cdots\Big)$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^{n-1}}{2^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n}\frac{(z+1)^n}{(k+1)2^{n-k}}\right]\right\}.$$

12.问下列各函数有那些孤立奇点？各属于哪一种类型？

(1)$\frac{z-1}{z(z^2+4)^2}$; (2)$\mathrm{ctg}z$; (3)$\frac{2}{\sin z-\sin a}$(a为常数)；

（4）$\dfrac{e^{\frac{1}{z-1}}}{e^{z}-1}$，（5）$\sin\dfrac{1}{1-z}$.

解：（1）$z=0$，$\pm 2i$ 和 ∞ 是函数的孤立奇点，$z=0$ 是一阶极点，$z=\pm 2i$ 都是二阶极点，$z=\infty$ 是可去奇点。

（2）$z=n\pi(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ 是函数的孤立奇点，是一阶极点，$z=\infty$ 是极点的极限点。

（3）$\sin z-\sin a$ 的 n 阶零点就是所给函数 n 阶极点。由三角函数的有关性质可知它的零点是：

$$z_{k_1}=2k_1\pi+a,\quad z_{k_2}=(2k_2+1)\pi-a$$

$$(k_1,\ k_2=0,\ \pm 1,\ \cdots)$$

它在 z_{k_1} 和 z_{k_2} 的泰勒展式分别是：

$$\cos a\ (z-z_{k_1})-\frac{\sin a}{2!}(z-z_{k_1})^2+\cdots,$$

和 $-\cos a(z-z_{k_2})-\dfrac{\sin a}{2!}(z-z_{k_2})^2+\cdots$.

因此，当 $a=k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时，z_{k_1} 和 z_{k_2} 是 $\sin z-\sin a$ 的二阶零点，从而是所给函数的二阶极点。当 $a\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{2}$ 时，z_{k_1} 和 z_{k_2} 是 $\sin z-\sin a$ 的简单零点，从而是所给函数的简单极点。

$z=\infty$ 是极点的极限点。

（4）$z=1$ 是本性奇点，$z=2n\pi i$ $(n=0,\ \pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是一阶极点；$z=\infty$ 是极点的极限点。

（5）$z=1$ 是本性奇点，$z=\infty$ 是可去奇点。

13. 证明：在扩充复平面上只有一个一阶极点的解析函数 $f(z)$ 必有下面的形式：

$$f(z)=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\ \alpha\delta-\beta\gamma\neq 0.$$

证：1°，设有限点 z_0 是 $f(z)$ 的唯一的一阶极点，则 $f(z)$ 在 $0<|z-z_0|<\infty$ 内有如下罗朗展式：

$$f(z)=\frac{C_{-1}}{z-z_0}+C_0+C_1(z-z_0)+\cdots+C_n(z-z_0)^n+\cdots$$

$(C_1\neq 0)$，由于 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 解析，故 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$

（A为有限数）从而有：

$$\lim_{z\to\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n\right]=\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-\frac{C_{-1}}{z-z_0}\right]=A$$

$(C_{-1}\neq 0)$，因此 $f(z)-\dfrac{C_{-1}}{z-z_0}$ 在扩充复平面上解析且有界，根据刘维尔定理，$f(z)-\dfrac{C_{-1}}{z-z_0}\equiv C$（$C$为常数），

于是 $f(z)=C+\dfrac{C_{-1}}{z-z_0}=\dfrac{Cz+(C_{-1}-Cz_0)}{z-z_0}$，且

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-Cz-(C_{-1}-Cz_0)\cdot 1=-C_{-1}\neq 0.$$

2° 设 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的一阶极点，则在 $|z|<\infty$ 内有如下罗朗展式：

$$f(z)=c_1z+c_0+\frac{c_{-1}}{z}+\frac{c_{-2}}{z^2}+\cdots\ (c_1\neq 0)$$

由于 $\lim\limits_{z\to\infty}[f(z)-c_1z]=\lim\limits_{z\to\infty}(c_0+\dfrac{c_{-1}}{z}+\dfrac{c_{-2}}{z^2}+\cdots)=c_0$，

此处 c_0 为有限复数，故 $f(z)-c_1z$ 在扩充复平面上解析且有界，根据刘维尔定理，有

$f(z)-c_1z=c$　（c 为常数）。从而

$f(z)=c_1z+c$，且 $\alpha\delta-\beta\gamma=c_1\neq0$。

14. 设函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 解析，并且不恒等于一常数。试证 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点的必要与充分条件是：

$z=z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点。

证：必要性：设 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点，则 $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内有如下的级数展式：

$f(z)=C_m(z-z_0)^m+C_{m+1}(z-z_0)^{m+1}+\cdots$　$(c_m\neq0)$

设 $\varphi(z)=C_m+C_{m+1}(z-z_0)+C_{m+2}(z-z_0)^2+\cdots$

则 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析，且 $\varphi(z_0)\neq0$，于是有：

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{1}{(z-z)^m\varphi(z)}=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^m}.$$

其中 $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$ 在 z_0 解析，且 $\psi(z_0)\neq0$。设 $\psi(z)$ 在 z_0 的幂级数展式为：

$\psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots$

则 $\dfrac{1}{f(z)}=\dfrac{\psi(z_0)}{(z-z_0)^m}+\dfrac{\psi'(z_0)}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots$。

由于 $\psi(z_0)\neq0$，$\therefore$ $z=z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点。

充分性：设 $z=z_0$ 是 $\dfrac{1}{f(z)}$ 的 m 阶极点，则 $\dfrac{1}{f(z)}$ 在 z_0 的某一个邻域内的罗朗展式为：

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}}+\cdots=$$

$$=\frac{1}{(z-z_0)^m}[c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots],$$

其中 $c_{-m}\neq 0$。设 $\varphi(z)=c_{-m}+c_{-m+1}(z-z_0)+\cdots$。

显然 $\varphi(z)$在 z_0解析，且$\varphi(z_0)\neq 0$，于是

$$f(z)=(z-z_0)^m\frac{1}{\varphi(z)}=(z-z_0)^m\psi(z).$$

其 中 $\psi(z)=\dfrac{1}{\varphi(z)}$.显然$\psi(z)$在z_0也解析，且$\psi(z_0)\neq 0$。

则 $\psi(z)$ 在 z_0的某个邻域内有如下的幂级数展式：

$\psi(z)=\psi(z_0)+\psi'(z_0)(z-z_0)+\cdots$

从而有：

$$f(z)=\psi(z_0)(z-z_0)^m+\psi'(z_0)(z-z_0)^{m+1}+\cdots$$

由于 $\psi(z_0)\neq 0$，故 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的 m 阶零点。

15．设 $f(z)$及 $g(z)$ 满足下列条件之一：

（1） $f(z)$及 $g(z)$ 在 z_0分别有m 阶及 n 阶零点；

（2） $f(z)$及 $g(z)$在 z_0 分别有m阶及 n 阶极点；

（3） $f(z)$ 在z_0解析或有极点，$g(z)$在z_0有孤立本性奇点。试问：$f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$及$\dfrac{g(z)}{f(z)}$在 z_0具有什么性质？

解：（1） ∵z_0分别是$f(z)$和$g(z)$的m阶及 n 阶零点，

∴ 在 z_0 的某个邻域内，有：

$$f(z)=(z-z_0)^m\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0.$$

$$g(z)=(z-z_0)^n\psi(z),\quad \psi(z_0)\neq 0.$$

其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 都在 z_0 的某个邻域内解析.

Ⅰ. $f(z)+g(x)$

$$=\begin{cases}(z-z_0)^m[\varphi(z)+(z-z_0)^{n-m}\psi(z)], & n>m;\\(z-z_0)^n[\psi(z)+(z-z_0)^{m-n}\varphi(z)], & m>n;\end{cases}$$

当 $n>m$ 时, $\varphi(z_0)+(z_0-z_0)^{n-m}\psi(z_0)=\varphi(z_0)\neq 0$;

当 $m>n$ 时, $\psi(z_0)+(z_0-z_0)^{m-n}\varphi(z_0)=\psi(z_0)\neq 0$,

故 z_0 是 $f(z)+g(z)$ 的 $min\{m, n\}$ 阶零点,

当 $m=n$ 时, $f(z)+g(z)=(z-z_0)^n[\varphi(z)+\psi(z)]$, 在 z_0 有不低于 n 阶的零点.

Ⅱ. $f(z)\cdot g(z)=(z-z_0)^{m+n}\varphi(z)\cdot\psi(z)$,

$\varphi(z_0)\psi(z_0)\neq 0$, 故 z_0 是 $f(z)g(z)$ 的 $m+n$ 阶零点.

Ⅲ. $\dfrac{g(z)}{f(z)}=(z-z_0)^{n-m}\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}$, $\dfrac{\psi(z_0)}{\varphi(z_0)}\neq 0$.

当 $n>m$ 时, z_0 是它的 $n-m$ 阶零点;

当 $n<m$ 时, z_0 是它的 $m-n$ 阶极点;

当 $n=m$ 时, z_0 是它的可去奇点.

(2) ∵ z_0 分别是 $f(z)$ 及 $g(z)$ 的 m 阶及 n 阶极点,

∴ 在 z_0 的某个邻域内, 有:

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z),\quad \varphi(z_0)\neq 0.$$

$$g(z)=\frac{1}{(z-z_0)^n}\psi(z),\quad \psi(z_0)\neq 0$$

其中 $\varphi(z)$ 和 $\psi(z)$ 在 z_0 的某个邻域内解析, 由此可见:

Ⅰ. $f(z)+g(z)$

$$\frac{g(z)}{f(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\left[\varphi(z)+(z-z_0)^{m-n}\psi(z)\right], & m>n\\ \dfrac{1}{(z-z_0)^n}\left[\psi(z)+(z-z_0)^{n-m}\varphi(z)\right], & n>m\end{cases}$$

其中当 $m>n$ 时，$\varphi(z_0)+(z_0-z_0)^{m-n}\psi(z_0)=\varphi(z_0)\neq 0$，

当 $n>m$ 时，$\psi(z_0)+(z_0-z_0)^{n-m}\varphi(z_0)=\psi(z_0)\neq 0$。

故当 $m\neq n$ 时，z_0是 $f(z)+g(z)$ 的 $max\{m,\ n\}$ 阶极点，

当 $m=n$ 时，$f(z)+g(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^m}\left[\varphi(z)+\psi(z)\right]$

z_0是不高于m阶的极点或可去奇点

当 $\varphi(z_0)+\psi(z_0)\neq 0$ 时，是m阶极点，

当 $\varphi(z_0)+\psi(z_0)=0$时，是低于m阶极点或可去奇点。

Ⅱ. $f(z)g(z)=\dfrac{1}{(z-z_0)^{m+n}}\varphi(z)\psi(z)$，

$\varphi(z_0)\psi(z_0)\neq 0$，故 z_0 是 $f(z)\cdot g(z)$ 的 $m+n$ 阶极点。

Ⅲ. $$\frac{g(z)}{f(z)}=\begin{cases}\dfrac{1}{(z-z_0)^{n-m}}\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}, & n>m;\\ (z-z_0)^{m-n}\dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}, & n<m\end{cases}\qquad \frac{\psi(z_0)}{\varphi(z_0)}\neq 0.$$

故当 $n>m$ 时，z_0是 $n-m$ 阶极点；

当 $n<m$ 时，z_0 是 $m-n$ 阶零点；

当 $n=m$ 时，z_0 是可去奇点。

（3）设 z_0 是 $f(z)$ 的解析点，则 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$，而 $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)$ 不存在有限或无限的极限，因此，

$f(z)+g(z)$，$f(z)\cdot g(z)$ 和 $\dfrac{g(z)}{f(z)}$ 在 z_0 也不存在有限或无限的极限，所以它们都以 z_0 为本性奇点。

设 z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则有：

$$f(z)=\frac{1}{(z-z_0)^m}\varphi(z)，$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析且 $\varphi(z_0)\neq 0$，又由于 z_0 是 $g(z)$ 的本性奇点，故可设：

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Ⅰ．$f(z)+g(z)$。易见 z_0 是它的本性奇点。

Ⅱ．$f(z)\cdot g(z)$。

$$\because\quad \frac{1}{(z-z_0)^m}g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^{n-m}+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_n(z-z_0)^{-(n+m)},$$

$\therefore\quad \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ 在点 z_0 的罗朗展式有无穷多个负幂项，

从而 z_0 是它的本性奇点，因此

$$f(z)\cdot g(z)=\varphi(z)\cdot\frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$$

以 z_0 为本性奇点。

Ⅱ. $\dfrac{g(z)}{f(z)}$

$\because\ (z-z_0)^m g(z_0)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^{n+m}+$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n+m}.$$

$\therefore\ (z-z_0)^m g(z)$ 在 z_0 的罗朗展式中含有无穷多个负幂项，从而z_0是它的本性奇点，因此

$$\frac{g(z)}{f(z)}=\frac{(z-z_0)^m g(z)}{\varphi(z)}.$$

以z_0为本性奇点。

16. 设函数$f(z)$在区域D内解析，证明：如果对某一点$z_0 \in D$ 有：

$$f^{(n)}(z_0)=0,\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

那末，$f(z)$在D内为常数。

证：已知 $f(z)$ 在D内解析，$z_0\in D$，则在z_0的一个含在D内的邻域 $|z-z_0|<r$ 内有：

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n.$$

又由于 $f^{(n)}(z_0)=0\ (n=1,2,\cdots)$，从而在 $|z-z_0|<r$ 内有 $f(z)\equiv f(z_0)$，又根据解析函数唯一性定理，知在D内恒有 $f(z)\equiv f(z_0)$，即 $f(z)$在D内为常数。

17. 问是否存在着满足下列条件，并且在原点解析的函数 $f(z)$？

（1） $f(\frac{1}{2n-1})=0$，$f(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2n}$；

（2） $f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}$；

（3） $f(\frac{1}{2n-1})=f(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2n}$。

在这里 $n=1,2,3,\cdots$。

解：（1）由于$\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$及$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$（$n=1,2,\cdots$）都以零为聚点，由解析函数的唯一性定理，$f(z)=z$ 是在原点解析并满足$f(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2n}$的唯一函数，但这函数不满足条件 $f(\frac{1}{2n-1})=0$（$n=1,2,\cdots$）。因此在原点解析并满足所给条件的函数不存在。

（2）$\left\{\frac{1}{n}\right\}$以 $z=0$ 为聚点，又

$$f(\frac{1}{n})=\frac{1}{n+1}=\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}},$$

由解析函数的唯一性定理，$f(z)=\frac{z}{1+z}$是在原点解析并满足所给条件的唯一函数。

（3）由于$\left\{\frac{1}{2n}\right\}$和$\left\{\frac{1}{2n+1}\right\}$（$n=1,2,\cdots$）都以 $z=0$ 为聚点，根据解析函数的唯一性定理，$f(z)=z$ 是在原点解析并满足 $f(\frac{1}{2n})=\frac{1}{2n}$ 的唯一函数，但这函数不满足条件

$f(\frac{1}{2n-1})=\frac{1}{2n}$，因此在原点解析并满足所给条件的函数不存在。

18. 函数 $\sin\frac{1}{1-z}$ 的零点 $1-\frac{1}{n\pi}$ $(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ 所成的集有聚点1，但这函数不恒等于零，问这与解析函数的唯一性是否相矛盾？

解：虽然 $\sin\frac{1}{1-z}$ 在点集 $\left\{1-\frac{1}{n\pi}\middle|n=\pm1,\pm2,\cdots\right\}$ 上取值为零，且这点集有唯一的聚点1，但点1并不在 $\sin\frac{1}{1-z}$ 的解析区域内；而根据解析函数的唯一性定理，点集的聚点在函数的解析区域内时，才能由这点集上的值确定函数在整个解析区域内的值，因此 $\sin\frac{1}{1-z}$ 不恒等于零，与解析函数唯一性不矛盾。

19. 设区域D内含有一段实轴，又设函数$u(x,y)+$ $+iv(x,y)$及$u(z,0)+iv(z,0)$都在D内解析。求证在D内：

$u(x,y)+iv(x,y)=u(z,0)+iv(z,0)$。

证：在区域D内，令 $f_1(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，$f_2(z)=u(z,0)+iv(z,0)$。对于D内含有的一段实轴上的每一点 $z=x$，有 $f_1(x)=f_2(x)=u(x,0)+iv(x,0)$。故依解析函数的唯一性定理知对于 $z\in D$，有

$$f_1(z)=f_2(z),$$

即 $u(x,y)+iv(x,y)=u(z,0)+iv(z,0)$。

20. 见第六章习题

第五章　留　　数

1．试求下列解析函数或多值函数的解析分枝在指定各点的留数：

（1）　$\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$，在 $z=\pm i$；

（2）　$\dfrac{1}{1-e^z}$，在 $z=2n\pi i$，n 为整数；

（3）　$\dfrac{\sqrt{z}}{1-z}$，在 $z=1$；

（4）　$\sin\dfrac{1}{z-1}$，在 $z=1$。

解：（1）$z=\pm i$ 是 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 的二阶极点，

$$Res(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{(z-i)^2\cdot\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right\}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{(z+i)^2}\right\}=-\frac{i}{4},$$

$$Res(f,-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{(z+i)^2\cdot\frac{z^2}{(z^2+1)^2}\right\}$$

$$=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2}{(z-i)^2}\right\}=\frac{i}{4}.$$

（2） $z=2n\pi i$ 是 $f(z)=\frac{1}{1-e^z}$ 的一阶极点，

$$Res(f,2n\pi i)=\left.\frac{1}{(1-e^z)'}\right|_{z=2n\pi i}=-1.$$

（3） $z=1$ 是 $f(z)=\frac{\sqrt{z}}{1-z}$ 的一阶极点，

$$Res(f,1)=\left.\frac{\sqrt{z}}{(1-z)'}\right|_{z=1}=\mp 1$$

（取 $\sqrt{1}=1$ 的那个分枝时，$Res(f,1)=-1$，

取 $\sqrt{1}=-1$ 的那个分枝时，$Res(f,1)=1$）。

（4） $z=1$ 是 $\sin\frac{1}{z-1}$ 的本性奇点，又 $\sin\frac{1}{z-1}$ 在 $z=1$ 的邻域内的罗朗展式为：

$$\sin\frac{1}{z-1}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^5-\cdots$$

$$\therefore\quad Res\left(\sin\frac{1}{z-1},1\right)=C_{-1}=1.$$

2．函数 $\frac{\mathrm{Ln}z}{z^2-1}$ 的各解析分枝在 $z=\pm1$ 各有怎样的孤立奇点？求它们在这些点的留数。

解：在 $z=1$ 的邻域 $|z-1|<1$ 内多值函数 $\mathrm{Ln}z$ 的各解析分枝为：

$$(\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi),$$

$$(k=0,\pm1,\pm2,\cdots;\ \arg 1=0).$$

当 $k=0$ 时，$z=1$ 是 $\dfrac{(\mathrm{Ln}z)_0}{z^2-1}$ 的可去奇点；

$k=\pm1,\pm2,\cdots$ 时，$z=1$ 是 $\dfrac{(\mathrm{Ln}z)_k}{z^2-1}$ 的一阶极点。

$$Res\left[\frac{(\mathrm{Ln}z)_k}{z^2-1},1\right]=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)}{z^2-1}$$

$$=k\pi i;$$

在 $z=-1$ 的邻域 $|z+1|<1$ 内多值函数 Lnz 的各解析分枝为：

$(\mathrm{Ln}z)_k=\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots$ $\arg(-1)=\pi)$，$z=-1$ 是各解析分枝的一阶极点。

$$Res\left[\frac{(\mathrm{Ln}z)_k}{z^2-1},-1\right]=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{\ln|z|+i(\arg z+2k\pi)}{z^2-1}$$

$$=-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i.$$

3．计算下列积分：

（1）$\displaystyle\int_C\frac{zdz}{(z-1)(z-2)^2}$，其中 C 是 $|z-2|=\dfrac{1}{2}$；

（2）$\displaystyle\int_C\frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)}$，其中 C 是 $|z|=1$；

（3）$\displaystyle\int_C \mathrm{tg}\pi z dz$，其中 C 是 $|z|=n$ $(n=1,2,3,\cdots)$。

解（1）$f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ 在 C：$|z-2|=\dfrac{1}{2}$

内只有二阶极点 $z=2$，而 $Res(f,2)=-1$。于是由留数定

理得： $$\int_C \frac{z dz}{(z-1)(z-2)^2} = 2\pi i \mathrm{Res}(f,2) = -2\pi i.$$

（2） $f(z)=\frac{e^z}{z^2(z^2-9)}$ 在C：$|z|=1$ 内有二阶极点

$z=0$。而 $\mathrm{Res}(f,0)=-\frac{1}{9}$。故由留数定理得：

$$\int_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2-9)} = 2\pi i \mathrm{Res}(f,0) = -\frac{2}{9}\pi i.$$

（3） $f(z)=\mathrm{tg}\,\pi z$ 在C：$|z|=n$ 内包含有$2n$个一阶极

点：$\pm\frac{1}{2}$，$\pm\frac{3}{2}$，$\cdots\pm\frac{2n-1}{2}$。而

$$\mathrm{Res}\left(\mathrm{tg}\pi z, \pm\frac{2k-1}{2}\right) = \left.\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}\right|_{z=\pm\frac{2k-1}{2}} = -\frac{1}{\pi}.$$

故由留数定理，得：

$$\int_C \mathrm{tg}\,\pi z\, dz = 2\pi i \cdot 2n\left(-\frac{1}{\pi}\right) = -4ni.$$

4．设函数 $f(z)$ 在区域 $r_0<|z|<\infty$ 内解析，C 表示圆 $|z|=r$ $(0<r_0<r)$。我们把积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz$$

定义作为函数 $f(z)$ 在无穷远点的留数，记作$\mathrm{Res}(f,\infty)$，在这里积分中的 C^- 表示积分是沿着C按顺时针方向取的。试证明：如果 a_{-1} 表示 $f(z)$ 在 $r_0<|z|<+\infty$ 的罗朗展式中 $\frac{1}{z}$ 的系数，那末 $\mathrm{Res}(f,\infty)=-a_{-1}$。

证：在扩充的复平面上，因为$f(z)$ 在$r_0<|z|<\infty$内解

析，故$z=\infty$是$f(z)$的孤立奇点。设C：$|z|=r$ $(0<r_0<r)$，则在$r<|z|<\infty$内$f(z)$有罗朗展式

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{-n}z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n z^n.$$

由于它的右端的两个极数在C上一致收敛，故可沿C^-逐项积分，而得

$$\int_{C^-}f(z)\,dz=\alpha_{-1}\int_{C^-}\frac{dz}{z}=-\alpha_{-1}\cdot 2\pi i.$$

$$\therefore\quad Res(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}f(z)\,dz=-\alpha_{-1}.$$

5．试求下列函数在无穷远点的留数：

（1）$\dfrac{1}{z}$；（2）$e^{\frac{1}{z}}$；（3）$\dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)}$。

解：（1）$\alpha_{-1}=1$，$Res\left(\dfrac{1}{z},\ \infty\right)=-1$。

（2）$\because\ e^{\frac{1}{z}}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!}\,\dfrac{1}{z^2}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\,\dfrac{1}{z^n}+\cdots$，

$\therefore\ \alpha_{-1}=1$，$Res(e^{\frac{1}{z}},\ \infty)=-1$。

（3）$$\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}=\frac{1}{z^6(1-\frac{1}{z^5})(1-\frac{3}{z})}$$

$$=\frac{1}{z^6}\left[1+\frac{1}{z^5}+\left(\frac{1}{z^5}\right)^2+\cdots\right]\left[1+\frac{3}{z}+\left(\frac{3}{z}\right)^2+\cdots\right]$$

显然$\alpha_{-1}=0$，$\therefore$ $Res\left[\dfrac{1}{(z^5-1)(z-3)},\ \infty\right]=0$。

6．试把关于留数的基本定理1·1转移到 D 是扩充复平面上含无穷远点区域情形。

解：定理1·1′．设D是复平面上含无穷远点的区域，其边界C是由有限条互不包含也互不相交的简单闭曲线 $c_1, c_2, \cdots, c_m$ 组成的：$c = c_1 + c_2 + \cdots + c_m$。
又设 $f(z)$ 在$\overline{D}$上除去孤立奇点$z_1, z_2, \cdots, z_n$及无穷远点外解析。则

$$\int_{C^-} f(z)dz = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + Res(f, \infty)\right\}.$$

证：设c_0是一个以原点为心的充分大的圆，使得 $f(z)$ 的所有有限奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 以及边界C都在 c_0 的内区域内，于是由留数基本定理1．1，得：

$$\int_{c_0 + C^-} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$$

即有 $\int_{c_0} f(z)dz + \int_{C^-} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k).$

又∵ $Res(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_0^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{c_0} f(z)dz$

$$\therefore \int_{C^-} f(z)dz = 2\pi i\left\{\sum_{k=1}^{n} Res(f, z_k) + Res(f, \infty)\right\}.$$

7．证明：如果 $f(z)$ 在复平面上除了有限个奇点外，在每一点解析，那末这函数在所有奇点上的留数（包括在无穷远点的留数）之和是零。

用此结果计算积分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z^5-1)(z-3)}.$$

证：以原点为心作任意大圆 C，使 $f(z)$ 的所有奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_K$（除∞外）都包含在这个大圆 C 的内区域内，根据留数定理得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz=\sum_{n=1}^{k} Res(f, z_n).$$

又 $$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)dz = Res(f, \infty),$$

而 $$\int_C f(z)dz+\int_{C^-} f(z)dz=0.$$

因此 $$\sum_{n=1}^{k} Res(f, z_n)+\text{Res}(f, \infty)=0.$$

记 $$I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{1}{(z^5-1)(z-3)},$$

则 I 等于 $\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}$ 在$|z|=2$内的所有奇点的留数之和。但它在$|z|=2$外还有一阶极点$z=3$和可去奇点 $z=\infty$。故有：

$$I+\text{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, 3\right]+$$

$$+\text{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, \infty\right]=0.$$

显然 $\text{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)}, 3\right]=\frac{1}{3^5-1}$ 又由题5（3）知

$$\text{Res}\left[\frac{1}{(z^5-1)(z-3)},\ \infty\right]=0$$

$$\therefore\quad I=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2}\frac{dz}{(z^5-1)(z-3)}=-\frac{1}{3^5-1}=-\frac{1}{242}.$$

8．求下列各积分：

（1）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}$；

解：这一积分显然收敛，函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 在上半平面只有一个极点 $z=i$。由题1（1）知：

$$\text{Res}\,(f,i)=-\frac{i}{4}$$

作以O为圆心，r 为半径的圆盘，考虑这一圆盘在上半平面的部分，设其边界为 C_r（如图5．1）．

取 $r>1$，那么 $z=i$ 包含在 C_r 的内区域内，沿 C_r 取 $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$ 的积分，根据留数定理，有：

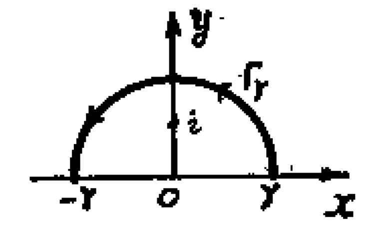


图5．1

$$\int_{-r}^{r}\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}+\int_{\Gamma_r}\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2}$$

$$=2\pi i\text{Res}(f,i)=2\pi i\left(-\frac{i}{4}\right)=\frac{\pi}{2}. \qquad (*)$$

其中 Γ_r 表示 C_r 上的圆弧部分，沿它的积分是按幅角增加的方向取的。

现在估计（*）式左边第二个积分，我们有

$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2}\right|\leqslant\frac{r^2}{(r^2-1)^2}\cdot\pi r$$

因此 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{z^2dz}{(z^2+1)^2}=0$.

在（*）式中令 $r\to\infty$，就得到：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{2}$$

从而有：$\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi}{4}$.

（2）$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$，其中 $0<a<1$.

解：由于 $0<a<1$，被积函数的分母

$$1-2a\cos\theta+a^2=(1-a)^2+2a(1-\cos\theta)$$

在 $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ 内不为零，因而积分是有意义的。

令 $z=e^{i\theta}$，则 $\cos\theta=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\frac{z+z^{-1}}{2}$,

$d\theta=\frac{dz}{iz}$. 当 θ 由 0 变到 2π 时，z 按反时针方向绕圆 C：$|z|=1$ 一周，因此：

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{1}{1-2a\cdot\frac{z+z^{-1}}{2}+a^2}\cdot\frac{dz}{iz}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{i(z-az^2-a+a^2z)}$$

$$=\int_{|z|=1}\frac{dz}{i(1-az)(z-a)}.$$

被积函数的两个极点$z=a$，$\frac{1}{a}$中，只有$z=a$在$|z|=1$内，它是一阶极点，而

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{i(1-az)(z-a)},\ a\right]$$

$$=\lim_{z\to a}\left[(z-a)\cdot\frac{1}{i(1-az)(z-a)}\right]=\frac{1}{i(1-a^2)}$$

因此由留数定理，得：

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}=2\pi i\cdot\frac{1}{i(1-a^2)}=\frac{2\pi}{1-a^2}.$$

（3）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+\sin^2x}$，其中$a>0$.

解：$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+\sin^2x}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+\sin^2x}$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(1+2a)-\cos2x}=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1+2a)-\cos\theta}$$

令$z=e^{i\theta}$，则$\cos\theta=\frac{z+z^{-1}}{2}$，$dz=\frac{dz}{iz}$当$\theta$由$-\pi$变到$\pi$时，$z$依反时针方向绕圆$C$：$|z|=1$ 一周，从而有：

$$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{(1+2a)-\cos\theta}=i\int_C\frac{dz}{z^2-2(2a+1)z+1}$$

$$=i\int_C\frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$，其中$\alpha=(2a+1)+\sqrt{(2a+1)^2-1}$，

$\beta=(2a+1)-\sqrt{(2a+1)^2-1}$ 是被积函数的一阶极点，显然$\alpha>1$，$\beta<1$. 故被积函数的两个极点中只有β在C内，而

$$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)},\ \beta\right]=\frac{1}{\beta-\alpha}=-\frac{1}{4\sqrt{a(a+1)}}$$

因此由留数定理得：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{a+\sin^2x}=i\int_C\frac{dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

$$=i\cdot 2\pi i\left(-\frac{1}{4\sqrt{a(a+1)}}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{a(a+1)}}.$$

（4）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx$；

解：此积分显然收敛，取$r>0$我们有：

$$\int_0^r\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\int_0^r\frac{x(e^{ix}-e^{-ix})}{2i(x^2+1)}dx$$

$$=\frac{1}{2i}\int_{-r}^r\frac{x^{ix}}{x^2+1}dx \qquad (*)$$

函数$f(z)=\dfrac{ze^{iz}}{z^2+1}$在$y\geqslant0$上除去有一阶极点$z=i$外，在其它每一点都解析，而$\operatorname{Res}(f,i)=\left.\dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=\dfrac{1}{2e}$

取$r>1$，作如图5.1中那样的区域，于是根据留数定理，有：

$$\int_{-r}^r\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz=2\pi i\operatorname{Res}(f,i)$$

即 $$\int_{-r}^r\frac{xe^{iz}}{x^2+1}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz=\frac{\pi i}{e} \qquad (**)$$

其中Γ_r的意义及沿它的积分方向都同题8（1）中所述。

取 $g(z)=\frac{z}{z^2+1}$，$\theta_1=0$，$\theta_2=\pi$，$r_0=2$，那末在引理3.1中所设条件显然满足，从而

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{ze^{iz}}{z^2+1}dz=0$$

在（＊＊）式中令$r\to+\infty$得：

$$\lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{r}\frac{xe^{ix}}{x^2+1}dx=\frac{\pi i}{e}.$$

从而由（＊）式有：

$$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2i}\cdot\frac{\pi i}{e}=\frac{\pi}{2e}.$$

（5）$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$；

解：此积分显然收敛。

解法一：取ε及r，使$r>\varepsilon>0$，有：

$$\int_\varepsilon^r\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$$

$$=-\frac{i}{2}\left[\int_\varepsilon^r\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx+\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx\right]\ (*)$$

函数 $f(z)=\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}$ 在 $y\geqslant0$上除去有一阶极点$z=0$和$z=i$外，在其它每一点都解析，而

$$\mathrm{Res}(f,i)=\left.\frac{e^{iz}/z}{(z^2+1)'}\right|_{z=i}=-\frac{1}{2e}.$$

作如图 5.2 所示的区域，其中 $r>1$，于是根据留数定理有：

图5.2

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz+\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}\left[\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)},i\right]=2\pi i\left(-\frac{1}{2e}\right)$$

$$=-\frac{\pi i}{e}. \qquad (**)$$

在这里沿 Γ_ε 及 Γ_r 的积分分别是按幅角减小及增加方向取的，

$$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=\int_{\Gamma_\varepsilon}\left[\frac{1}{z}+h(z)\right]dz$$

$$=\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{dz}{z}+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz=-\pi i+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz.$$

其中$h(z)$在$z=0$解析，因而在 $z=0$的一个邻域内$|h|$有上界 M，于是当 ε 充分小时，有：

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz\right|\leqslant M\cdot 2\pi\varepsilon.$$

因此有 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{e^{iz}}{z}dz=0.$

应用引理 3·1，知 $\lim\limits_{r\to+\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=0$。在(＊＊)

式中，令$\varepsilon\to0$及$r\to\infty$，结合（*）式可见：

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=-\frac{i}{2}\left(-\frac{\pi i}{e}+\pi i\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

解法二：$\dfrac{\sin x}{x(x^2+1)}=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$.

由书中P. 117 例4：$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

又由8（4）题：$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}dx=\frac{\pi}{2e}$.

$$\therefore\quad\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right).$$

（6）$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx$.

解法一：考虑多值函数$\dfrac{\mathrm{Ln}\,z}{(z^2+1)^2}$，在复平面上取正实轴作割线得一个区域，在这一区域内，除去$z=\pm i$，在所得区域内，这函数可以分成解析分枝，取在割线上沿取实值的一枝，并且用$f(z)=\dfrac{\ln z}{(z^2+1)^2}$表示它。

把$f(z)$沿着如图5.2所示的一条闭曲线$c(r,\varepsilon)$积分，在$c(r,\varepsilon)$的内区域内，$f(z)$只有一个二阶极点$z=i$，

且 $\displaystyle\mathrm{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{\ln z}{(z+i)^2}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}+i\right).$

根据留数定理，得：

$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}dz+$$

$$+\int_{-r}^{-\varepsilon}\frac{\ln|x|+\pi i}{(x^2+1)^2}dx+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}dz$$

$$=2\pi i\,\mathrm{Res}(f,i)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi i}{2}-1\right). \qquad (*)$$

考虑（*）式内第二个和第四个积分，我们有：

$$\left|\int_{\Gamma_r}\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}dz\right|\leqslant\frac{\ln r+\pi}{(r^2-1)^2}\pi r,\quad (r>1)$$

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}dz\right|\leqslant\frac{-\ln\varepsilon+\pi}{(1-\varepsilon^2)^2}\pi\varepsilon,\quad (0<\varepsilon<1).$$

故 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}dz=0,\quad \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\ln z}{(z^2+1)^2}dz=0$

再考虑(*)式内第三个积分，这积分经实数代换 $x=-t$ 后变为



$$\int_{\varepsilon}^{r}\frac{\ln t+i\pi}{(t^2+1)^2}dt.$$

于是，在(*)式内令 $r\to\infty,\varepsilon\to 0$ 即得：

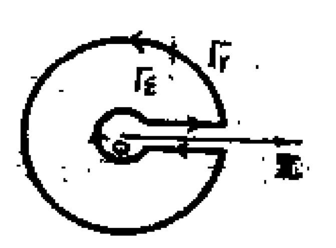


图 3.5

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx+i\pi\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi i}{2}-1\right),$$

但由书中 P. 114 例2，已知 $\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^2}=\frac{\pi}{4}$，

故最后得：$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\pi}{4}$.

解法二：考虑多值函数$\frac{(\text{Ln } z)^2}{(z^2+1)^2}$，取正实轴作割线，用$f(z)=\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}$表示在割线上沿取实值的那个分枝，选取积分闭围线$c(r,\varepsilon)(0<\varepsilon<1, r>1)$如图5.3所示，$f(z)$在$c(r,\varepsilon)$内有二阶极点$z=\pm i$，且

$$\text{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(\ln z)^2}{(z+i)^2}\right)=\frac{\pi^2 i-4\pi}{16},$$

$$\text{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}\frac{d}{dz}\left(\frac{(\ln z)^2}{(z-i)^2}\right)=\frac{12\pi-9\pi^2 i}{16}$$

根据留数定理，得：

$$\int_\varepsilon^r\frac{(\ln x)^2}{(x^2+1)^2}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}dz+$$

$$+\int_r^\varepsilon\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{(x^2+1)^2}dx+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}dz$$

$$=2\pi i[\text{Res}(f,i)+\text{Res}(f,-i)]$$

$$=2\pi i\left(\frac{\pi^2 i-4\pi}{16}+\frac{12\pi-9\pi^2 i}{16}\right).$$

即 $$-4\pi i\int_\varepsilon^r\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx+4\pi^2\int_\varepsilon^r\frac{dx}{(x^2+1)^2}+$$

$$+\left(\int_{\Gamma_r}+\int_{\Gamma_\varepsilon}\right)\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}dz=\pi^2 i+\pi^3 .\quad (*)$$

又 $$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}dz=0.$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(\ln z)^2}{(z^2+1)^2}dz=0,$$

从而在（*）式中令 $r\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，则有：

$$-4\pi i\int_0^\infty\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx+4\pi^2\int_0^\infty\frac{dx}{(x^2+1)^2}$$
$$=\pi^2 i+\pi^3.$$

比较虚部即得：$\int_0^\infty\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}\ dx=-\frac{\pi}{4}$。

（7）$\int_0^\infty\frac{x^{1-a}}{1+x^2}dx$，其中$0<a<2$。

解：考虑多值函数：$\frac{z^{1-a}}{1+z^2}$，在复平面上取正实轴作割线得一区域，在这区域里除去$z=\pm i$后所得区域内，这函数可分成解析分枝；取在割线上沿取正实值的那枝，并用

$f(z)=\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}$表示它。

把 $f(z)$ 沿着如图 5.3 所示的闭曲线 $c(r,\varepsilon)$ 积分，$(0<\varepsilon<1, r>1)$，$f(z)$ 在 $c(r,\varepsilon)$ 内区域有两个一阶极点 $z=\pm i$，且

$$\operatorname{Res}(f,i)=\lim_{z\to i}(z-i)\ \frac{(z^{1-a})_0}{(z-i)(z+i)}=\frac{e^{\frac{\pi}{2}i(1-a)}}{2i};$$

$$\operatorname{Res}(f,-i)=\lim_{z\to -i}(z+i)\frac{(z^{1-a})_0}{(z+i)(z-i)}=\frac{e^{\frac{3\pi}{2}i(1-a)}}{-2i}$$

又在正实轴的下沿，$f(z)=e^{2\pi i(1-a)}|z|^{1-a}$。根据留数定理，显然有：

$$[1-e^{2\pi i(1-a)}]\int_{\varepsilon}^{r}\frac{x^{1-a}}{1+x^2}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}dz+$$

$$+\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}dz=2\pi i[Res(f,i)+Res(f,-i)]$$

$$=\pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i}\ [1-e^{(1-a)\pi i}] \qquad (*)$$

又 $\left|\int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}dz\right|\leqslant\frac{r^{1-a}}{r^{2-a}}\cdot 2\pi r=\frac{r^{-a}}{1-\frac{1}{r^2}}\cdot 2\pi,$

$$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}dz\right|\leqslant\frac{\varepsilon^{1-a}}{1-\varepsilon^2}\cdot 2\pi\varepsilon=\frac{\varepsilon^{2-a}}{1-\varepsilon^2}\cdot 2\pi,$$

由于 $0<a<2$，故得：

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}dz=0,\quad \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{(z^{1-a})_0}{1+z^2}dz=0,$$

于是在（*）式中令 $r\to\infty$，$\varepsilon\to 0$，则有：

$$[1-e^{2\pi i(1-a)}]\int_0^{\infty}\frac{x^{1-a}}{1+x^2}dx$$

$$=\pi e^{(1-a)\frac{\pi i}{2}}[1-e^{(1-a)\pi i}]$$

因此 $\int_0^{\infty}\frac{x^{1-a}}{1+x^2}dx=\frac{\pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i}[1-e^{(1-a)\pi i}]}{1-e^{2\pi i(1-a)}}=$

$$=\frac{\pi e^{(1-a)\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\pi i(1-a)}}=\frac{\pi}{2\cos\frac{(1-a)\pi}{2}}=\frac{\pi}{2\sin\frac{a\pi}{2}}.$$

(8) $\int_0^{+\infty}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$，其中 $-\pi<a<\pi$.

解：此积分收敛，考虑函数

$$f(z)=\frac{e^{az}}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$$

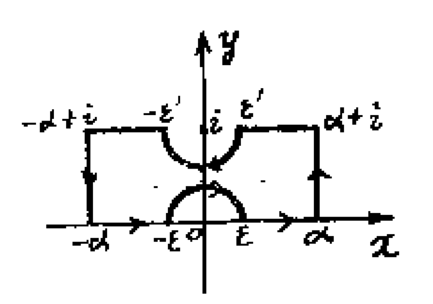


图5.4

并取积分路线 c 如图5.4 $(0<\varepsilon',\varepsilon'<\frac{1}{2})$ 因它在 c 的内区域解析，故依柯西定理有：

$$\int_{-\alpha}^{-\varepsilon} f(x)dx+\int_{\varepsilon}^{\alpha} f(x)dx+\int_{\alpha}^{\varepsilon'} f(x+i)dx+$$

$$+\int_{-\varepsilon'}^{-\alpha} f(x+i)dx+i\int_0^1 f(\alpha+iy)dy+$$

$$+i\int_1^0 f(-\alpha+iy)dy+\int_{C_\varepsilon} f(z)dz+\int_{C_{\varepsilon'}} f(z)dz=0\ (*)$$

由 $\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}\frac{e^{ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx=\int_{\varepsilon}^{\alpha}\frac{-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$，得：

$$\left(\int_{-\alpha}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{\alpha}\right)f(x)dx=\int_{\varepsilon}^{\alpha}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx,$$

$$\left(\int_{-\varepsilon'}^{-\alpha}+\int_{\alpha}^{\varepsilon'}\right)f(x+i)dx=e^{ai}\int_{\varepsilon'}^{\alpha}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx.$$

又 $\left|i\int_0^1 f(\alpha+iy)dy\right|\leqslant\frac{e^{a}}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}=\frac{1}{e^{(\pi-a)\alpha}-e^{-(\pi+a)\alpha}}$,

$$\left|i\int_0^1 f(-\alpha+iy)dy\right|\leqslant\frac{e^{-a\alpha}}{e^{\pi\alpha}-e^{-\pi\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{e^{(\pi+a)\alpha}-e^{-(\pi-a)\alpha}};$$

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \int_{C_\varepsilon}\left[\frac{1}{2\pi z} + h(z)\right]dz$$

$$= -\frac{1}{2}i + \int_{C_\varepsilon} h(z)dz,$$

$$\int_{C_{\varepsilon'}} f(z)dz = \int_{C_{\varepsilon'}}\left[-\frac{e^{ai}}{2\pi}\cdot\frac{1}{z-i} + k(z)\right]dz =$$

$$= \frac{e^{ai}}{2}i + \int_{C_{\varepsilon'}} k(z)dz.$$

其中$h(z)$和$k(z)$分别在点 0 和点 i 的充分小的邻域内解析。

当 $\alpha\to+\infty$ 时，$\frac{1}{e^{(\pi-a)\alpha}-e^{-(\pi-a)\alpha}}$和

$\frac{1}{e^{(\pi+a)\alpha}-e^{-(\pi-a)\alpha}}$都趋于0；

当 $\varepsilon\to0$ 时，$\int_{C_\varepsilon} h(z)dz$ 和 $\int_{C_{\varepsilon'}} k(z)dz$都趋于0，因此在(*)式中令 $\varepsilon\to0$，$\alpha\to+\infty$时得：

$$\int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx + e^{ai}\int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx -$$

$$-\frac{1}{2}i + \frac{e^{ai}}{2}i = 0,$$

即$$(1+\cos a + i\sin a)\int_0^\infty \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx$$

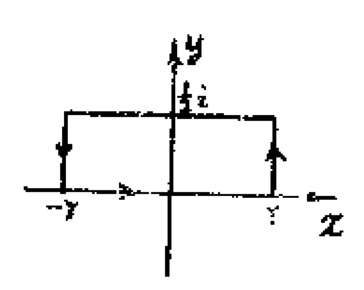
$$= \frac{1}{2}\sin a + \frac{i}{2}(1-\cos a).$$

比较虚部得：

$$\sin a\int_0^{\infty}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx=\frac{1}{2}(1-\cos a).$$

因此 $$\int_0^{+\infty}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx=\frac{1}{2}tg\frac{a}{2}.$$

(9) $\int_0^{\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}dx.$



(图5.5)

解：此积分显然收敛。

考虑 $f(z)=\frac{z}{e^{\pi z}-e^{-\pi z}}$，

$z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，从而适当补充 $f(0)$ 的定义后，$f(z)$ 在如图 5.5 所示的闭矩形上解析。根据柯西定理得：

$$\int_{-r}^{r}f(x)dx+i\int_0^{\frac{1}{2}}f(r+iy)dy+$$

$$+\int_r^{-r}f\left(x+\frac{1}{2}i\right)dx+i\int_{\frac{1}{2}}^{0}f(-r+iy)dy=0 \quad (*)$$

类似于题8（8）有：

$$\lim_{r\to+\infty}\left[i\int_0^{\frac{1}{2}}f(r+iy)dy\right]=0,$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left[i\int_{\frac{1}{2}}^{0}f(-r+iy)dy\right]=0,$$

又 $\int_{-r}^{r}f\left(x+\frac{i}{2}\right)dx=$

$$= \int_{-r}^{r} \frac{x+\frac{i}{2}}{e^{\pi x+\frac{1}{2}\pi i} - e^{-\pi x-\frac{1}{2}\pi i}}\, dx$$

$$= \frac{1}{i}\int_{-r}^{r} \frac{x+\frac{i}{2}}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\, dx$$

$$= \frac{1}{i}\int_{-r}^{r}\frac{x}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,dx + \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\frac{dx}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}\int_{-r}^{r}\frac{e^{\pi x}}{1+e^{2\pi x}}\,dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\frac{e^{\frac{t}{2}}}{1+e^{t}}\,dt.$$

由书中$P.119(4.1')$，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{bu}}{1+u}\,du = \frac{\pi}{\sin \pi b}$$ 知：

$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-2\pi r}^{2\pi r}\frac{e^{t}}{1+e^{t}}\,dt = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi.$$

从而 $$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r} f\left(x+\frac{i}{2}\right)dx = \frac{1}{4}.$$

因此在(*)式中令$r\to+\infty$，则有$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{1}{4}$.

又由于 $\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}$ 是偶函数，

故得：$$\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{1}{8}.$$

(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

解：此积分显然收敛。

解法一：$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos 2x}{2x^2} dx$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2} dx. \qquad (*)$$

令$f(z) = \frac{1-e^{iz}}{z^2}$，考虑它沿如图 5.2 所示的闭围线积分。

由于 $f(z)$ 在所围区域上解析，故由柯西定理得：

$$\int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_r} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz +$$

$$+ \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz = 0 \qquad (**)$$

在这里沿 Γ_ε 及沿 Γ_r 的积分分别是按幅角减小及增加的方向取的。

考虑（＊＊）式中第一个和第三个积分之和：

$$\because \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx = \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-e^{-ix}}{x^2} dx,$$

$$\therefore \int_{\varepsilon}^{r} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx =$$

$$= \int_{\varepsilon}^{r} \frac{2-(e^{ix}+e^{-ix})}{x^2} dx =$$

$$=2\int_{\varepsilon}^{r}\frac{1-\cos x}{x^2}dx.$$

现在求（＊＊）式中第二个积分当 $r\to\infty$ 时的极限：

$$\because\quad \left|\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z^2}\right|\leqslant\frac{\pi r}{r^2}=\frac{\pi}{r},\qquad \therefore\ \lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{z^2}=0;$$

又依引理 3.1。 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}}{z^2}dz=0,$

故 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=0.$

再求当 $\varepsilon\to0$ 时 $\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz$ 的极限。当 $z\neq0$ 时，

$$\frac{1-e^{iz}}{z^2}=-\frac{i}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}iz-\cdots=-\frac{i}{z}+h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析。

$$\text{故}\quad \int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{1-e^{iz}}{z^2}dz=\int_{\Gamma_\varepsilon}\left(-\frac{i}{z}\right)dz+$$

$$+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz=-\pi+\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz.$$

由于 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析，故在 $z=0$ 的一个邻域内，$|h(z)|\leqslant M$，

于是当 ε 充分小时，$\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz\right|\leqslant M\pi\varepsilon.$

从而 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\int_{\Gamma_\varepsilon}h(z)dz=0$。于是在（＊＊）式中令 $\varepsilon\to0$，

$r\to\infty$ 得：

$$2\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx - \pi = 0,\quad \text{即}\quad \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

故由（＊）式得：$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

解法二：考虑函数 $f(z) = \frac{\sin z}{z^2}e^{iz}$，积分路径仍如图5.2所示，由于$f(z)$在所围的区域上解析，故由柯西定理得：

$$\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x^2}e^{ix}dx + \int_{\Gamma_r} \frac{\sin z}{z^2}e^{iz}dz +$$

$$+\int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2}e^{ix}dx + \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{\sin z}{z^2}e^{iz}dz = 0. \qquad (*)$$

又 $\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x^2}e^{ix}dx + \int_{-r}^{-\varepsilon} \frac{\sin x}{x^2}e^{ix}dx$

$$= 2i\int_\varepsilon^r \frac{\sin x}{x^2}\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}dx$$

$$= 2i\int_\varepsilon^r \frac{\sin^2 x}{x^2}dx.$$

类似于解法一，有：

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r} \frac{\sin z}{z^2}e^{iz}dz$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{1}{2i}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{2iz}-1}{z^2}dz = 0.$$

再求当$\varepsilon\to0$时，$\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\sin z}{z^2}e^{iz}dz$ 的极限：

当 $z\neq0$ 时，$\frac{\sin z}{z^2}e^{iz} = \frac{1}{z^2}\Big(z - \frac{z^3}{3!} +$

$$+\frac{z^5}{5!}-\cdots\Big)\Big(1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\cdots\Big)=\frac{1}{z}+h(z),$$

其中 $h(z)$ 在 $z=0$ 解析，故类似于解法一，有：

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{\sin z}{z^2}e^{iz}dz=-\pi i.$$

于是在（＊）式中令 $\varepsilon\to 0$，$r\to\infty$，则得：

$$2i\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx-\pi i=0,\quad \therefore\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

(11) $\displaystyle\int_0^\infty\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx.$

解：考虑 $f(z)=\dfrac{e^{iz}-e^{-z}}{z}$，$z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点，从而适当补充 $f(0)$ 的定义后，$f(z)$ 在全平面解析．选择如图 5.6 所示的积分围线，则由柯西定理，得：

$$\int_0^r\frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx+\int_{\Gamma_r}\frac{e^{iz}-e^{-z}}{z}dz+$$

$$+\int_r^0\frac{e^{-y}-e^{-iy}}{y}dy=0.\qquad (＊)$$

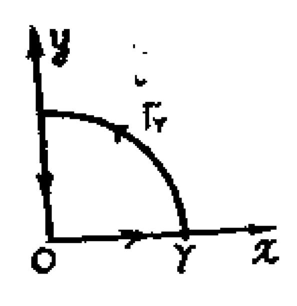


图 5.6

考虑(＊)式中第一个和第三个积分之和：

$$\int_0^r\frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}dx+$$

$$+\int_r^0\frac{e^{-y}-e^{-iy}}{y}dy=$$

$$=2\int_0^r\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx.$$

再估计第二个积分：

利用引理 3.1'即得 $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\Gamma_1}\frac{e^{iz}}{z}dz=0$。

再作代换 $z_1=iz$，并利用引理 3.1，得：

$$\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{e^{-z}}{z}dz=\lim_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r'}\frac{e^{z_1}}{z_1}dz_1=0,$$

其中 Γ_r' 和 Γ_r 关于虚轴对称。

于是在(*)式中令 $r\to\infty$，则有 $\int_0^{\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}dx=0$。

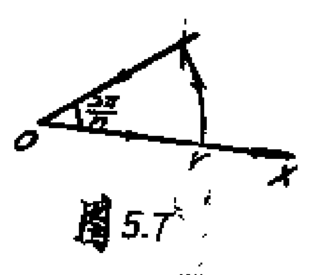
(12) $\int_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^n}$，其中整数 $n\geqslant 2$。

解. 当 $n\geqslant 2$ 时，积分收敛。取积分围线如图 5.7 所示 $(r>1)$. $f(z)=\frac{1}{1+z^n}$ 在扇形区域内有一阶极点 $e^{\frac{\pi}{n}i}$，且

$$\operatorname{Res}(f,\ e^{\frac{\pi}{n}i})=\frac{1}{(1+z^n)'}\Big|_{z=e^{\frac{\pi}{n}i}}=-\frac{e^{\frac{\pi}{n}i}}{n}.$$

当 $\arg z=0$ 时，$z=x(0\leqslant x<\infty)$；

当 $\arg z=\frac{2\pi}{n}$ 时，令 $|z|=x$，



则 $z=xe^{\frac{2\pi i}{n}}$ $(0\leqslant x<\infty)$。由留数定理有：

图 5.7

$$\int_0^r\frac{dx}{1+x^n}+\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{1+z^n}+\int_r^0\frac{e^{\frac{2\pi i}{n}}}{1+x^n e^{2\pi i}}dx=$$

$$=2\pi i\operatorname{Res}(f,\ e^{\frac{\pi}{n}i})=-\frac{2\pi i}{n}e^{\frac{\pi}{n}i}$$

由此有：$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\int_0^r \frac{dx}{1+x^n}+\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{1+z^n}=$

$$= -\frac{2\pi i}{n}\, e^{\frac{\pi}{n}i} \qquad (*)$$

又 $\left|\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{1+z^n}\right| \leqslant \frac{\frac{2\pi}{n}r}{r^n-1}$，而$n\geqslant 2$，∴ $\lim\limits_{r\to\infty}\int_{\Gamma_r}\frac{dz}{1+z^n}=0$.

故在（*）式中令 $r\to\infty$，则有

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2\pi i}{n}\, e^{\frac{\pi}{n}i}.$$

从而 $$\int_0^\infty\frac{dx}{1+x^n} = \frac{-\frac{2\pi i}{n}e^{\frac{\pi}{n}i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{\pi}{n}\cdot\frac{2i}{e^{\frac{\pi}{n}i}-e^{-\frac{\pi}{n}i}}$$

$$= \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}.$$

(13) $\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2-1}\,dx$.

解：考虑多值函数 $\frac{(\mathrm{Ln}\,z)^2}{z^2-1}$，取正实轴作割线，用 $f(z)=\frac{(\ln z)^2}{z^2-1}$ 表示在割线上沿取实值（即在正实轴上沿 $\arg z=0$）的那个分枝，选取积分围线 $C(R,\varepsilon)$,

如图5.8所示，$f(z)$在$C(R,\varepsilon,\varepsilon')$ $(0<\varepsilon,\varepsilon'<\frac{1}{2}$；$R>1)$的内区域内有极点$z=-1$，且$\text{Res}(f,-1)=\lim\limits_{z\to-1}[(z+1)f(z)]=\frac{\pi^2}{2}$，在割线上沿$x=1$是$f(z)$的可去奇点，此外$f(z)$再无其它奇点。根据留数定理，得：

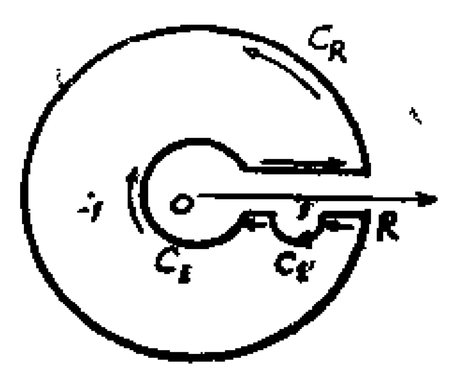


图5.8

$$\int_\varepsilon^R f(x)dx+\int_{C_R}f(z)dz+\int_R^{1+\varepsilon'}f(x)dx+$$

$$+\int_{C_{\varepsilon'}}f(z)dz+\int_{1-\varepsilon'}^{\varepsilon}f(x)dx+\int_{C_\varepsilon}f(z)dz=$$

$$=2\pi i\text{Res}(f,\ -1)=\pi^3 i \qquad (*)$$

又当$z\in C_{\varepsilon'}$时，因为在正实轴下沿$\arg z=2\pi$，$\ln z=2\pi i+\lambda(\varepsilon')$，其中$\lambda(\varepsilon')\to0$，当$\varepsilon'\to0$时。于是，注意到在$C_{\varepsilon'}$上，$z=\varepsilon' e^{i\theta}+1$，故有

$$\lim_{\varepsilon'\to0}\int_{C_{\varepsilon'}}f(z)dz=\lim_{\varepsilon'\to0}\int_{C_{\varepsilon'}}\frac{(\ln z)^2}{(z-1)(z+1)}dz$$

$$=\lim_{\varepsilon'\to0}\int_{2\pi}^{\pi}\frac{[2\pi i+\lambda(\varepsilon')]^2 i}{2+\varepsilon' e^{i\theta}}d\theta=2\pi^3 i,$$

故由（*）式得：

$$\int_\varepsilon^R\frac{\ln^2 x}{x^2-1}dx-\int_\varepsilon^R\frac{(\ln x+2\pi i)^2}{x^2-1}dx+2\pi^3 i+$$

$$+\left(\int_{C_R}+\int_{C_\varepsilon}\right)f(z)dz=\pi^3 i \qquad (**).$$

又易知：$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} f(z)dz=0$，$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz=0$。

故在（＊＊）式中，令$\varepsilon\to 0$，$R\to+\infty$，得：

$$2\pi^3 i-4\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2-1}dx=\pi^3 i.$$

因此 $$\int_0^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2-1}dx=\frac{\pi^2}{4}.$$

(14) $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}.$$

解：考虑多值函数$g(z)=\sqrt[3]{(1-z)(1+z)^2}$，显然它有枝点$z=1$和$z=-1$，而$z=\infty$不是枝点，故在复平面上取线段〔$-1$，$1$〕为割线，得一区域。在此区域内，可以把$g(z)$分成解析分枝。取在割线的上沿为正值那一枝，此时规定在割线上沿取$\arg(1+x)=0$，$\arg(1-x)=0$。

作闭围线如图5.9所示，其中Γ_ε和Γ_ε'分别是以-1和1为圆心，ε为半径的圆，Γ_r是以0为圆心，r为半径的圆，在这里$0<\varepsilon<1$，$r>2$。

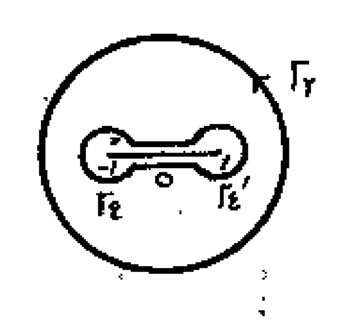


图5.9

如图5.9，当z从上沿沿Γ_ε'按顺时针方向转到下沿时，$\arg(1-z)$减少2π，$\arg(1+z)$不变。因此$g(z)$的幅角增加$-\frac{2\pi}{3}$，故在割线的下沿：

$$g(x)=e^{-\frac{2\pi}{3}i}\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}.$$

根据柯西定理，得

$$\left(1-e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}+\left(\int_{\Gamma_r}+\right.$$

$$\left.+\int_{\Gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_{\varepsilon'}}\right)\frac{dz}{g(z)}=0. \qquad (*)$$

其中沿Γ_ε及沿$\Gamma_{\varepsilon'}$的积分是按顺时针方向取的。沿Γ_r的积分是按反时针方向取的。

又 $\left|\int_{\Gamma_{\varepsilon'}}\frac{dz}{g(z)}\right|\leqslant 2\pi\varepsilon^{\frac{2}{3}}$， $\left|\int_{\Gamma_\varepsilon}\frac{dz}{g(z)}\right|\leqslant 2\pi\varepsilon^{\frac{1}{3}}$.

所以当$\varepsilon\to 0$时，上述两个积分都趋于零。故在（＊）式中，令$\varepsilon\to 0$，得：

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}=\int_{\Gamma_r^-}\frac{dz}{g(z)} \qquad (**)$$

现在计算 $\int_{\Gamma_r^-}\frac{dz}{g(z)}$.

由于$z=\infty$是$\frac{1}{g(z)}$的一阶零点，故其留数为

$-\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z}{g(z)}$. 于是显然有：

$$\int_{\Gamma_r^-}\frac{1}{g(z)}dz=2\pi i\ \mathrm{Res}\left[\frac{1}{g(z)},\ \infty\right]$$

$$=2\pi i\left[-\lim_{z\to\infty}\frac{z}{g(z)}\right]=-2\pi i\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{g(x)}.$$

现在来求$g(x)$在正实轴上$x>1$处的表达式，由于在割线$[-1,1]$的上沿，$\arg(1-x)=\arg(1+x)=0$。故在$x>1$

处，$\arg(1-x)=-\pi$，$\arg(1+x)=0$，从而

$$g(x)=\sqrt[3]{|(1-x)(1+x)^2|}\,e^{i\frac{\arg(1-x)+2\arg(1+x)}{3}}$$

$$=\sqrt[3]{(1-x)(1+x^2)}\,e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

$$\therefore\ \int_{\Gamma_r}\frac{1}{g(z)}dz=-2\pi i\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{g(x)}=-2\pi i e^{\frac{\pi i}{3}}$$

于是由（※※）式得：

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)(1+x)^2}}=\frac{-2\pi i e^{\frac{\pi}{3}i}}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(15) $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}$.

解：考虑多值函数 $g(z)=(z-2)\sqrt{1-z^2}$。在复平面上取线段$[-1,1]$作为割线，得一区域。在此区域内，可以把 $g(z)$分成解析分枝。取在割线上沿$\sqrt{1-x^2}$为正值的那枝，可规定 $\arg(1-x)=0$，$\arg(1+x)=0$。

取积分围线如图5.9所示。当z从上沿沿Γ_ε，按顺时针方向转到下沿时，$\arg(1-z)$减少2π，$\arg(1+z)$ 不变，因此 $g(z)$的幅角增加$-\pi$，故在割线的下沿

$$g(z)=(x-2)\sqrt{1-x^2}e^{-\pi i}=-(x-2)\sqrt{1-x^2}.$$

根据留数定理，得：

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}+\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}\frac{dx}{-(x-2)\sqrt{1-x^2}}+$$

$$+\left(\int_{\Gamma_\varepsilon}+\int_{\Gamma_{\varepsilon'}}+\int_{\Gamma_r}\right)\frac{dz}{g(z)}$$

$$=2\pi i\operatorname{Res}\left[\frac{1}{g(z)},\ 2\right]. \qquad (*)$$

而 $$\operatorname{Res}\left[\frac{1}{g(z)},\ 2\right]=\lim_{z\to 2}\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}e^{-\frac{\pi i}{2}}}=\frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}+\int_{1-\varepsilon}^{-1+\varepsilon}\frac{dx}{-(x-2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}.$$

因此，在（*）式中，令$\varepsilon\to 0$，得：

$$2\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}=2\pi i\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right),$$

即 $$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{(x-2)\sqrt{1-x^2}}=-\frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

（16） $\displaystyle\int_C\frac{dz}{\sqrt{1+z+z^2}}$，**其中被积函数是有关多值函数的任一解析分枝，并且积分是沿圆$|z|=2$按反时针方向取的。**

解：令$f(z)=(1+z+z^2)^{-\frac{1}{2}}$，在$|z|<2$内，$f(z)$有两个枝点$z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$。作割线连结这两枝点，如图5.10在割线的外部可以取解析分枝，在$x>2$时，若取$\arg(1+z+z^2)=0$的那一解析分枝，则有

$$\mathrm{Res}(f,\infty)=-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x+x^2}\,e^{i\frac{\arg(1+x+x^2)}{2}}}=-1.$$

$$\therefore\quad \int_C f(z)dz=2\pi i.$$

在$x>2$时，若取$\arg(1+x+x^2)=2\pi$的那一解析分枝，则依同样方法，有 $\int_C f(z)dz=-2\pi i$.

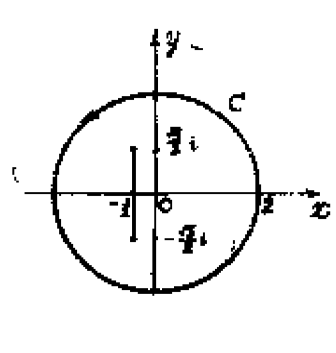


图5.10

9. 试由$\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

证明：

（1）$\int_0^\infty \cos r^2\,dr=\int_0^\infty \sin r^2\,dr=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$,

（2）$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2hx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-h^2}$，其中$h>0$.

证：考虑 e^{-z^2}，取积分围线如图5.11所示，由柯西定理得：

$$\left(\int_{OA}+\int_{\Gamma_R}+\int_{BO}\right)e^{-z^2}dz=0 \qquad (*)$$

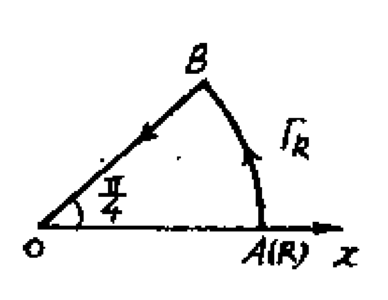


图5.11

已知 $\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-x^2}dx=\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

其次令 $z=Re^{i\theta}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$,

则$\int_{\Gamma_R}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-R^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)}ie^{i\theta}d\theta$

$$\therefore \quad \left|\int_R\right| \leqslant \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta} d\theta.$$

作变换$2\theta = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cos 2\theta} d\theta = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} e^{-R^2\sin\varphi} d\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi} d\varphi \leqslant \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2R^2}{\pi}\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{\pi}{4R^2}(1 - e^{-R^2}).$$

$$\therefore \lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} e^{-z^2} dz = 0.$$

最后，设z在BO上变动，令$|z| = r$，则

$$z = r\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}} r, \quad z^2 = ir^2.$$

$$\therefore \quad \int_{BO} = \int_R^0 e^{-ir^2} \frac{1+i}{\sqrt{2}} dr$$

$$= -\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^R (\cos r^2 - i\sin r^2) dr.$$

故在（*）式中，令$R\to\infty$，则有

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left[\int_0^\infty \cos r^2 dr - i\int_0^\infty \sin r^2 dr\right] = 0$$

即 $$\int_0^\infty \cos r^2 dr - i\int_0^\infty \sin r^2 dr = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1-i).$$

比较两端的实部和虚部，得：

$$\int_0^{\infty}\cos r^2 dr=\int_0^{\infty}\sin r^2 dr=\frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

（2）考虑 $f(z)=e^{-z^2}$，取如图 5.12 所示的矩形的边界作为积分围线，根据柯西定理，得：

$$\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx+\int_{R}^{-R}e^{-(x+hi)^2}dx+$$

$$+\left(\int_{s_1}+\int_{s_2}\right)e^{-z^2}dz=0. \qquad (*)$$

又 $\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx=2\int_0^{R}e^{-x^2}dx$,

故令 $R\to\infty$，并利用

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

得： $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{-R}^{R}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

图5.12

其次 $\int_{R}^{-R}e^{-(z+hi)^2}dz=-\int_{-R}^{R}e^{-(x+ih)^2}dx$.

$$=-e^{h^2}\int_{-R}^{R}e^{-x^2}e^{-2hix}dx.$$

故 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{R}^{-R}e^{-z^2}dz=-e^{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-2hix}dx.$

另外在线段 s_1 和 s_2 上，$z=\pm R+iy$ $(0\leqslant y\leqslant h)$.

$|e^{-z^2}|=e^{-(R^2-y^2)}\leqslant e^{h^2}e^{-R^2}$（将 y 换为它的最大值 h）.

故 $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{S_1} e^{-z^2}dz=\lim\limits_{R\to\infty}\int_{S_2} e^{-z^2}dz=0$.

从而在（*）式中令$R\to\infty$，则有

$$\sqrt{\pi}-e^{h^2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}e^{-2hix}dx=0.$$

比较实部，得 $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\cos 2hx\,dx=\sqrt{\pi}e^{-h^2}$.

于是得 $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\cos 2hx\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-h^2}$.

10. 试证：在定理5.1的条件下，如果$\varphi(z)$在闭区域D上解析，并且$\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_m$及$\beta_1,\beta_2,\cdots\beta_n$分别是$f(z)$在$D$内的零点和极点，而其阶数分别是$k_1,k_2,\cdots k_m$及$l_1,l_2\cdots l_n$，那么：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz=\sum_{p=1}^{m}k_p\varphi(\alpha_p)-\sum_{q=1}^{n}l_q\varphi(\beta_q).$$

证：由于α_p为$f(z)$的k_p阶零点，故$f(z)$在α_p的邻域内可写成

$$f(z)=(z-\alpha_p)^{k_p}\cdot g(z),\ (g(\alpha_p)\neq0,g(z)\text{解析}).$$

从而 $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi(z)\left[\frac{k_p}{z-\alpha_p}+\frac{g'(z)}{g(z)}\right]$，其中

$g(\alpha_p)\neq0$, $\frac{g'(z)}{g(z)}$在α_p的邻域内解析。故点α_p是函数

$\frac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点，显然$\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$在$\alpha_p$的留数等于$k^p\varphi(\alpha^p)$。

其次，由于β_q为$f(z)$的l_q阶极点，故在β_q的邻域内，有：

$$f(z)=\frac{\Psi(z)}{(z-\beta_q)^{l_q}}\quad (\Psi(\beta_q)\neq 0,\ \Psi(z)\text{ 解析 }),$$

从而 $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}=\varphi(z)\left\{\frac{-l_q}{z-\beta_q}+\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}\right\}$，其中 $\Psi(\beta_q)\neq 0$，$\frac{\Psi'(z)}{\Psi(z)}$在β_q的邻域内解析，故点β_q是函数 $\varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$的一阶极点，显然留数等于$-l_q\varphi(\beta_q)$。于是根据留数定理，得：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c \varphi(z)\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

$$=\sum_{p=1}^{m}k_p\varphi(\alpha_p)-\sum_{q=1}^{n}l_q\varphi(\beta_q).$$

11．应用儒歇定理，求下列方程在$|z|<1$内根的个数：

（1）$z^8-4z^5+z^2-1=0$；

（2）$z^4-5z+1=0$；

（3）$z=\varphi(z)$，在这里$\varphi(z)$在$|z|\leqslant 1$上解析，并且$|\varphi(z)|<1$。

解（1）令$f(z)=z^8-4z^5$，$g(z)=z^2-1$，在$|z|=1$上，$|f(z)|\geqslant|4z^5|-|z^8|=3$，$|g(z)|\leqslant 2$，故所给方程在$|z|<1$内根的个数与方程$f(z)=0$在$|z|<1$内根的个数相同。而$z^8-4z^5=z^5(z^3-4)=0$在$|z|<1$内有五个根.（$z=0$是五重根），故原方程在$|z|<1$内有五个根。

（2）令$f(z)=-5z$，$g(z)=z^4-1$，在$|z|=1$上，

$|f(z)|=5$，$|g(z)|\leqslant 2$，故所给方程在 $|z|<1$ 内根的个数与 $f(z)=0$ 在 $|z|<1$ 内根的个数相同。而 $f(z)=0$ 在 $|z|<1$ 内只有一个根，故原方程在 $|z|<1$ 内有一个根。

（3）令 $f(z)=z$，　则在 $|z|=1$ 上，$|f(z)|=1$，而 $|\varphi(z)|<1$，故方程 $z=\varphi(z)$ 与方程 $f(z)=0$ 在 $|z|<1$ 内有相同个数的根。从而 $z=\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内有一个根。

12. 试用儒歇定理证明代数基本定理：每一个 n 次多项式都有 n 个零点。

证：设多项式为

$F(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+a_nz^n$，　$n>0$，

$a_n\neq 0$，及 $f(z)=a_nz^n$。

$g(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}$。

首先，$f(z)$ 有 n 个零点，以原点为心，$R>1$ 为半径的圆，作为儒歇定理中的闭围线 c，则在 c 上：

$|f(z)|=|a_n|R^n$。

$$|g(z)|\leqslant|a_0|+|a_1|R+\cdots+|a_{n-1}|R^{n-1}$$
$$<(|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|)R^{n-1},$$

取 R，使 $R>\dfrac{|a_0|+|a_1|+\cdots+|a_{n-1}|}{|a_n|}$，则在 c 上有 $|g(z)|<|f(z)|$。所以由儒歇定理，知 $F(z)=f(z)+g(z)$ 有 n 个零点。

第六章　保形映照

1．如果单叶解析函数$w=f(z)$把z平面上可求面积的区域D映照成w平面上的区域D^*，证明D^*的面积是

$$A=\iint_C |f'(z)|^2 dxdy。$$

证：∵ $f(z)$是单叶解析函数，∴ $f'(z)\neq 0$，从而$|f'(z)|\neq 0$（$Z\in\overline{D}$），$C-R$条件，得：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}\\ -\frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2=|f'(z)|^2\neq 0$$

于是按二重积分的变量替换公式，可得D^*的面积

$$A=\iint_{D^*} dudv=\iint_D \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}dxdy=\iint_D |f'(z)|^2 dxdy。$$

2．如果函数$f(z)$在可求面积的区域D内单叶解析，并且满足条件$|f(z)|\leqslant 1$，证明：$\iint_D |f'(z)|^2 dxdy\leqslant\pi$。

证：设$w=f(z)$将z平面上区域D映照成w平面上的区域D^*，由于$|w|\leqslant 1$，故D^*的面积$A\leqslant\pi$，因此由上题知：

$$\iint\limits_{D}|f'(z)|^2 dxdy \leqslant \pi.$$

3. 如果函数 $f(z)$ 在 $z=0$ 解析，并且，$f'(0)\neq 0$，证明 $f(z)$ 在 $z=0$ 的一个邻域内单叶。

证法一：不妨假定 $f(0)=0$（如 $f(0)=a$，而 $a\neq 0$，可令 $F(z)=f(z)-a$，于是 $F(z)$ 满足题中所设条件，且 $F(z)$ 和 $f(z)$ 同时具备或同时不具备单叶性），因 $f'(0)\neq 0$，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一阶零点，由零点的孤立性，必可找到一个以 $z=0$ 为心以 ρ 为半径的圆 C，其内区域为 G，使得在圆 C 上 $f(z)\neq 0$，在闭区域 $\bar{G}$ 上 $f(z)$ 解析，在 G 内 $f(z)$ 除 $z=0$ 外无其它零点。用 m 表示 $|f(z)|$ 在 C 上的下确界，显然 $m>0$。

因 $f(z)$ 在 $z=0$ 连续，且 $f(0)=0$，故存在 ρ'，使当 $|z|<\rho'$ 时，有 $|f(z)|<m$，选取 $\rho''<min(\rho,\ \rho')$，则在 D：$|z|\leqslant\rho''$ 上，$|f(z)|<m$。

我们来证明 $w=f(z)$ 在 D 内单叶，令 $D_1=f(D)$，任取 $w_1\in D_1$，必有 $w_1=f(z_1)$，$z_1\in D$，$|w_1|<m$.则在圆 C 上，$|f(z)|\geqslant m>|w_1|$，而 $f(z)-w_1$ 和 $f(z)$ 都在闭区域 $\overline{G}$ 上解析，故由儒歇定理，在 G 内 $f(z)-w_1$，和 $f(z)$ 的零点个数相同。因而 $f(z)-w_1$ 在 D 内只有一个零点 z_1，也就是说，对于每一个 $w_1\in D_1$ 有唯一的 $z_1\in D$ 与其对应，所以 $w=f(z)$ 在 D：$|z|\leqslant\rho''$ 内单叶。

证法二：$\because$ $f(z)$ 在 $z=0$ 解析，且不妨假设 $f(0)=0$。

$\therefore$ 在 $|z|<r$ 内有 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n z^n$，

且 $f'(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n z^{n-1}$ 在 $|z|<r$ 内绝对收敛，因此当 $0<\rho<r$

时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} = |a_1| + \sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}$ 收敛。

又∵ $f'(0) \neq 0$，∴ $a_1 \neq 0$，于是存在充分小的 $\rho_0 > 0$，使得$\sum\limits_{n=2}^{\infty} n|a_n|\rho_0^{n-1} < |a_1|$。

从而对于在$|z|<\rho_0$内任意两个不同的点z_1和z_2，均有

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z_1^n - z_2^n\right)\right|$$

$$= |z_1 - z_2|\left|a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\left(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + \cdots + z_1^{n-1}\right)\right|$$

$$\geqslant |z_1 - z_2|\left[|a_1| - \sum_{n=2}^{\infty}|a_n| n\rho_0^{n-1}\right] > 0,$$

即$f(z_1) \neq f(z_2)$，故$f(z)$在$z=0$的一个邻域$|z|<\rho_0$内单叶。

4. 如果$f(z)$在区域D内解析，不为常数，且没有零点，证明$|f(z)|$不可能在D内达到最小值。

证：由于$f(z)$在D内解析，且无零点，故$g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$在区域D内解析，假定$|f(z)|$在区域D内达到最小值，则$|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z)|}$在区域$D$内必达到最大值，因此由最大模原理，$g(z)$在$D$内恒为常数，从而$f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$在$D$内也恒为常数，这与已知条件矛盾，因此$|f(z)|$在$D$内不可能达到最小值。

5．设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 上解析，在圆 $|z|=a$ 上有 $|f(z)|>m$，并且 $|f(0)|<m$，其中 a 及 m 都是有限正数，证明 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 内至少有一零点。

证：反证法，假定 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 内无零点，由于 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant a$ 上解析，故 $|f(z)|$ 在其上连续，从而 $|f(z)|$ 在其上可达到最小值，又由于在 $|z|=a$ 上 $|f(z)|>m$，而 $|f(0)|<m$，故 $f(z)$ 不为常数且 $|f(z)|$ 在 $|z|<a$ 内达到最小值，但这与4题结果矛盾，因此 $f(z)$ 在 $|z|<a$ 内至少有一个零点。

6．设在 $|z|<1$ 内，$f(z)$ 解析，并且 $|f(z)|<1$；但 $f(a)=0$，其中 $|a|<1$。证明：在 $|z|<1$ 内，有不等式

$$|f(z)|\leqslant\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|.$$

证：考虑函数 $w=\varphi(z)=\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$，它在 $|z|<1$ 内解析，把 $|z|<1$ 保形映照为 $|w|<1$，且 $\varphi(a)=0$，其反函数 $z=\varphi^{-1}(w)$ 在 $|w|<1$ 内解析，把 $|w|<1$ 映照成 $|z|<1$，且有 $\varphi^{-1}(0)=a$，考虑 $|w|<1$ 内的复合函数 $F(w)\equiv f[\varphi^{-1}(w)]$，它是解析的，并且，$F(0)\equiv f[\varphi^{-1}(0)]=f(a)=0$，当 $|w|<1$ 时，$|F(w)|=|f[\varphi^{-1}(w)]|=|f(z)|<1$，由希瓦尔兹引理，可知 $|F(w)|\leqslant|w|$，从而 $|f(z)|\leqslant\left|\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|$

7．应用希瓦尔兹引理，证明：把 $|z|<1$ 变为 $|w|<1$，且把 a 变为 0 的双方单值保形映照一定有下列形状

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z},$$

这里 θ 是实常数，α 是满足 $|\alpha|<1$ 的复常数。

证：设所求的满足条件的映照为 $f(z)$ 作映照

$w=\varphi(z)=\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$。由书中 P。147(2)可知，它将 $|z|<1$ 双方单值保形映照为 $|w|<1$，且 $\varphi(\alpha)=0$，因此它的逆映照 $z=\varphi^{-1}(w)$ 将 $|w|<1$ 双方单值保形映照为 $|z|<1$，且 $\varphi^{-1}(\alpha)=0$。

作 $\zeta=F(w)=f[\varphi^{-1}(w)]$，它将 $|w|<1$ 双方单值保形地映照成 $|\zeta|<1$，且 $F(0)=0$；故由希瓦尔兹引理可知，当 $|w|<1$ 时，有：

$$|F(w)|\leqslant|w| \qquad (1)$$

又 $w=F^{-1}(\zeta)$ 将 $|\zeta|<1$ 双方单值保形地映照为 $|w|<1$，且 $F^{-1}(0)=0$，故由希瓦尔兹引理可知，当 $|\zeta|<1$ 时，有 $|F^{-1}(\zeta)|\leqslant|\zeta|$，于是，相应地，当 $|w|<1$ 时，有

$$|w|\leqslant|F(w)| \qquad (2)$$

由（1）和（2）得：当 $|w|<1$ 时，$|F(w)|=|w|$。从而由希瓦尔兹引理得 $F(w)=e^{i\theta}w$，换为变量 z，即得

$f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$ 它就是所求的映照。

8．试作保形映照：

（1）把带形区域 $\pi<y<2\pi$ 映照成上半平面；

（2）把去掉上半虚轴的复平面映照成上半平面。

解：（1）

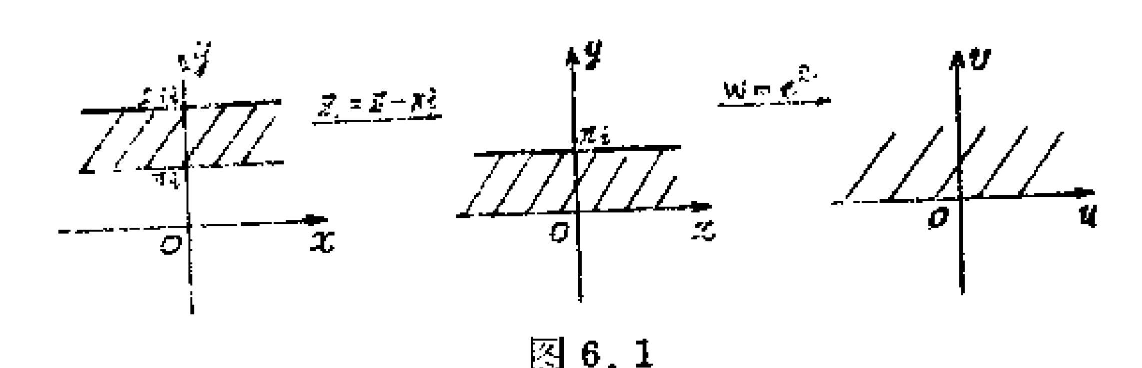


图 6.1

故 $w=e^{z_1}=e^{z-\pi i}=-e^{z}$ 即为所求。

（2）下图中 z_1 改成 $z_1=e^{-\frac{\pi}{2}i}z$，$\frac{\pi}{2}$ +2π $<\arg z<\frac{5\pi}{2}$ +2π

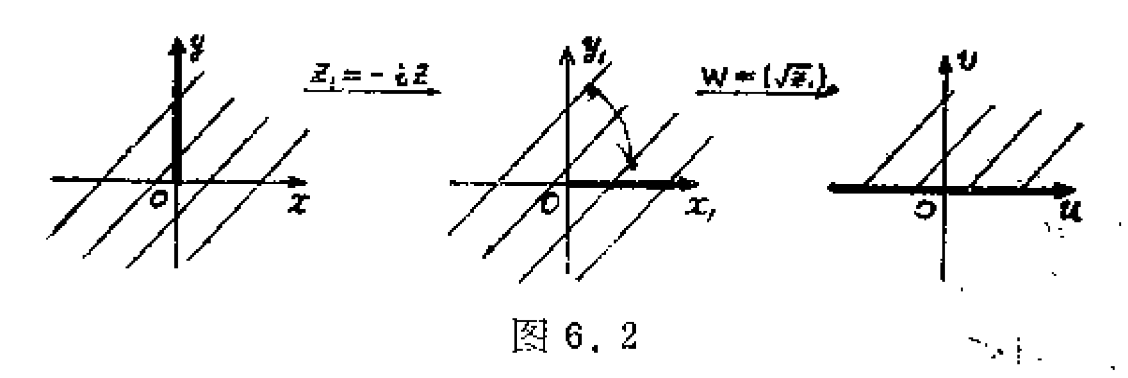


图 6.2

故 $w=e^{-\frac{\pi}{4}i}(\sqrt{z})_0$ 即为所求，其中 $(\sqrt{z})_0$

取当 $z=1$ 时 $(\sqrt{1})_0=1$ 的那一枝。

9．函数 $w=z^2$ 及 $z=\sqrt{w}$ 分别把 $x=c_1$，$y=c_2$ 及 $u=c_3$，$v=c_4$ 映照成 z 平面及 w 平面上的什么曲线？这里 u 及 v 是 w 的实部及虚部，c_1，c_2，c_3 及 c_4 是实常数。

解：$w=u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

$$\therefore\quad u=x^2-y^2,\qquad v=2xy.$$

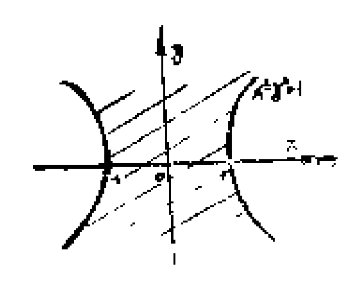
从而

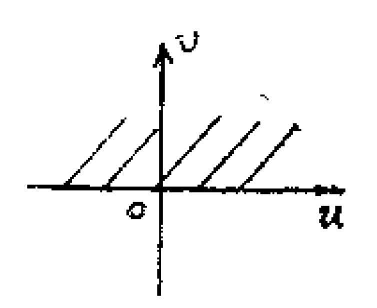
$$x=c_1\xrightarrow{w=z^2}\begin{cases}v^2=4c_1^2(u-c_1^2), & c_1\neq 0;\\ u\leqslant 0,\quad v=0, & c_1=0.\end{cases}$$

$$y=c_2 \xrightarrow{w=z^2} \begin{cases} v^2=4c_2^2\,(u+c_2^2), & c_2\neq 0; \\ u\geq 0,\ v=0, & c_2=0. \end{cases}$$

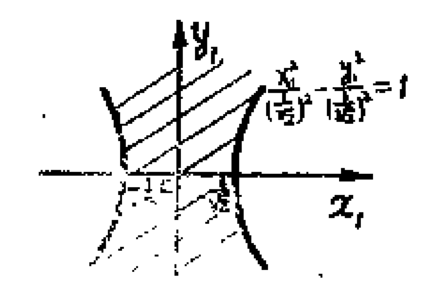
$$u=c_3 \xrightarrow{z=\sqrt{w}} \begin{cases} x^2-y^2=c_3, & c_3\neq 0; \\ x^2-y^2=0, & c_3=0. \end{cases}$$

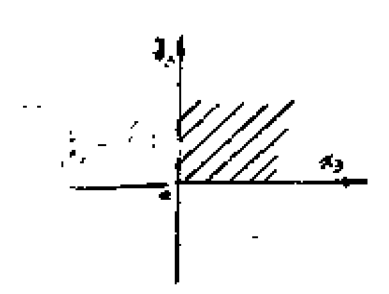
$$u=c_4 \xrightarrow{z=\sqrt{w}} \begin{cases} 2xy=c_4, & c_4\neq 0; \\ xy=0. & c_4=0. \end{cases}$$

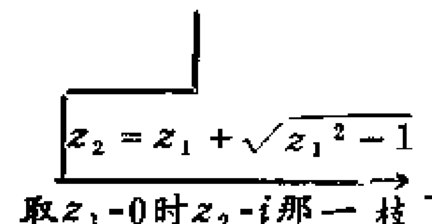


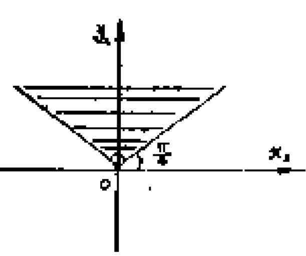


$Z_1=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ ↓　　　　$W=z_3^2$ ↑









$z_3=e^{-\frac{\pi}{4}i}\,z_2$

图 6.3

10．试作保形映照：

（1）把双曲线 $x^2-y^2=1$ 两枝之间的区域映照成上半平面；

(2)把抛物线 $v^2=4(u+1)$ 左方的区域映照成上半平面。

解：（1）见图 6.3

故 $$w=-i\left(\frac{z}{\sqrt{2}}+\sqrt{\frac{z^2}{2}-1}\right)^2$$ 即为所求；

（2）见图6.4.

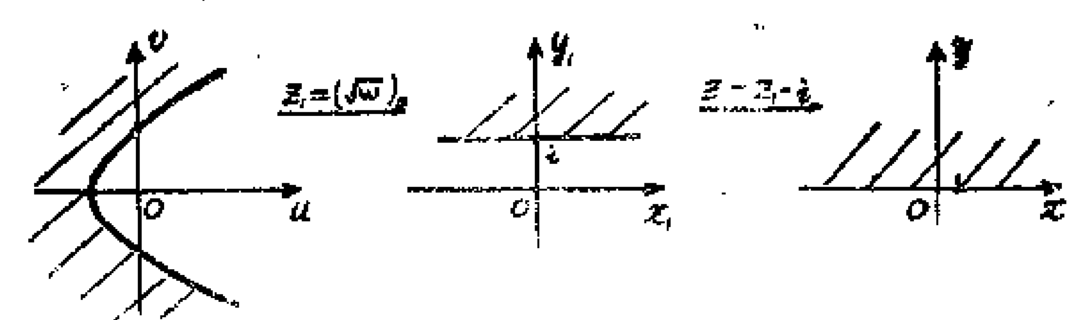


图 6.4

故 $z=z_1-i=(\sqrt{w})_0-i$ 即为所求 $(0<\arg w<2\pi)$。

11．试把圆盘 $|z|<1$ 保形映照成半平面 $\mathrm{Im}w>0$，并且将点 -1，1，i 映照成 (1)∞，0，1；或 (2) -1，0，1。

解：(1)$w=k\dfrac{z-1}{z+1}$ 把 $1\to0$；$-1\to\infty$，故它把单位圆周映照成实轴。又按 $i\to1$ 来选择 k，则必把 $|z|<1$ 映照为 $\mathrm{Im}w>0$　由 $1=k\dfrac{i-1}{i+1}$，得 $k=-i$，故 $w=i\dfrac{1-z}{1+z}$ 即为所求。

（2）$\because(-1,\ 1,\ z,\ i)=(-1,\ 0,\ w,\ 1)$。

$$\therefore\frac{z+1}{z-1}:\frac{i+1}{i-1}=\frac{w+1}{w}:\frac{1+1}{1}.$$

由此得 $w=\dfrac{z-1}{(2i-1)z+(2i+1)}$，此即为所求。

12．试把 $\mathrm{Im}z>0$ 保形映照成 $\mathrm{Im}w>0$，并且把点

（1）$-1, 0, 1$；或（2）$\infty, 0, 1$ 映照成 $0, 1, \infty$。

解：（1）$\because (-1,0,z,1)=(0,1,w,\infty)$

$$\therefore \quad \frac{z+1}{z} : \frac{1+1}{1} = \frac{w}{w-1}.$$

由此得 $w=\dfrac{z+1}{-z+1}$，此即为所求。

（2）$\because (\infty,0,z,1)=(0,1,w,\infty)$。

$$\therefore \quad \frac{1}{z}=\frac{w}{w-1}, \quad \therefore \quad w=\frac{1}{1-z}$$ 此即为所求。

13．试作一单叶解析函数 $w=f(z)$ 把 $|z|<1$ 映照成 $|w|<1$，并且使 $f(0)=\dfrac{1}{2}$，$f'(0)>0$。

解：设 $w=f(z)=e^{i\theta}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}(|a|<1)$，将 $|z|<1$ 映照成 $|w|<1$，由 $f(0)=\dfrac{1}{2}$ 得 $\dfrac{1}{2}=-ae^{i\theta}$，

又 $f'(z)=e^{i\theta}\dfrac{1-|a|^2}{(1-\bar{a}z)^2}$。故由 $f'(0)>0$，

得 $e^{i\theta}(1-|a|^2)>0$。但已知 $|a|<1$，故 $e^{i\theta}=1$。

从而 $\theta=0$，因此，$a=-\dfrac{1}{2}$，故 $w=\dfrac{2z+1}{z+2}$ 即为所求。

14．证明 z_1 及 z_2 是关于圆 C：$\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$。（$0<k\neq1$）的对称点。

证法一：参见书 P。146 例。

证法二，令 $z=x+iy$，$z_n=x_n+iy_n$，（$n=1,2$）代入圆方程 $\left|\dfrac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k$ （$0<k\neq1$）得：

$$\left(x-\frac{x_1-k^2x_2}{1-k^2}\right)^2+\left(y-\frac{y_1-k^2y_2}{1-k^2}\right)^2=$$

$$=\frac{k^2[(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2]}{(1-k^2)^2}$$

即 $|z-z_0|=\rho$，其中 $z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}$，$\rho=\frac{k|z_1-z_2|}{1-k^2}$.

因为

$$|z_1-z_0|=z_1-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}=\frac{k^2z_2-k^2z_1}{1-k^2}=\frac{k^2(z_2-z_1)}{1-k^2}$$

$$|z_2-z_0|=z_2-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}=\frac{z_2-z_1}{1-k^2}$$

所以，$|z_1-z_0|\cdot|z_2-z_0|=\frac{k^2}{(1-k^2)^2}|z_2-z_1|^2=\rho^2$.

因此 z_1 和 z_2 是关于圆

$$\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k\ (0<k\neq1)\ \text{的对称点。}$$

15. 在圆盘 $|z|<1$ 中除去实轴上的半闭区间 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 得一区域，试把这一区域保形映照成圆盘 $|w|<1$.

解：

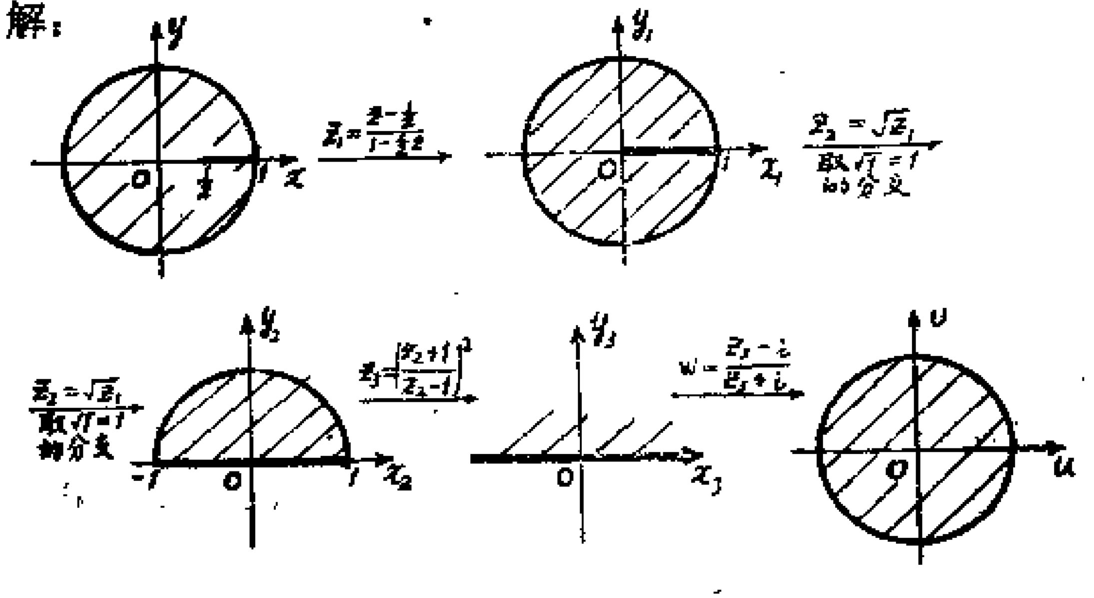


图6.5.（图中的$\sqrt{1}=1$应为$\sqrt{-1}=i$）

故 $w=\frac{(z_2+1)^2-(z_2-1)i}{(z_2+1)^2+(z_2-1)i}$ 即为所求，其中$z_2=\sqrt{\frac{2z-1}{2-z}}$.

16. 试作保形映照：

(1) 把$|z|<1$及$|z-1|<1$的公共部分映照成$|w|<1$；

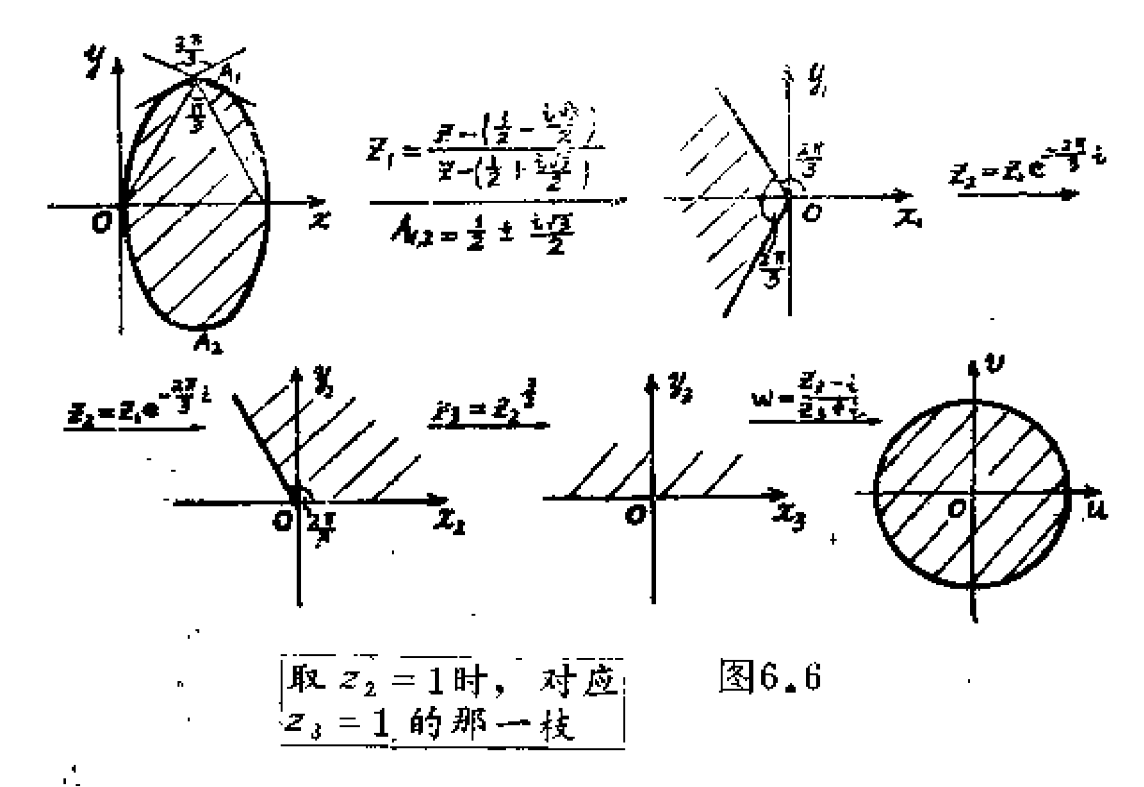
(2) 把扇形 $0<\operatorname{Arg}z<\alpha$ $(<2\pi)$，$|z|<1$ 映照成 $|w|<1$；

(3) 把圆环 $0<a<|z|<b$ 除去实轴上的区间 $(a,\ b)$ 而得的区域映照成 $|w|<1$；

(4) 把圆$|z|=2$及$|z-1|=1$所夹的区域映照成$|w|<1$；

(5) 把圆 $|z|<1$映照成带形 $0<v<1$，并把 $-1, 1, i$ 映照成∞，∞，i。

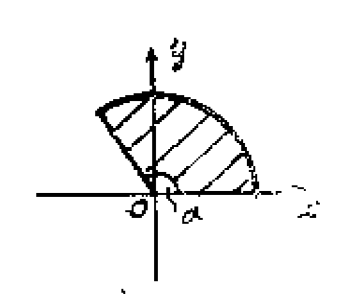
解 (1)



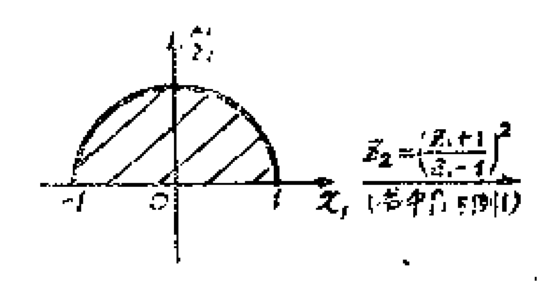
取 $z_2=1$时，对应 $z_3=1$ 的那一枝

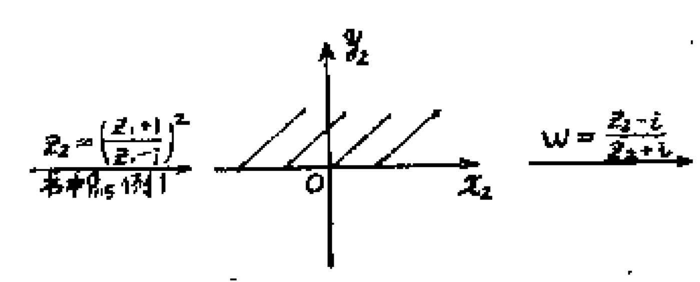
图6.6

故 $w=\dfrac{z_1^{\frac{3}{2}}+i}{z_1^{\frac{3}{2}}-i}$ 即为所求，其中 $z_1=\dfrac{z-\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)}{z-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)}$



$z_1 = z^{\frac{\pi}{\alpha}}$





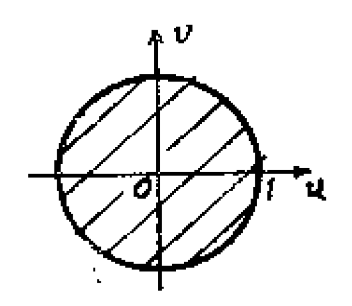
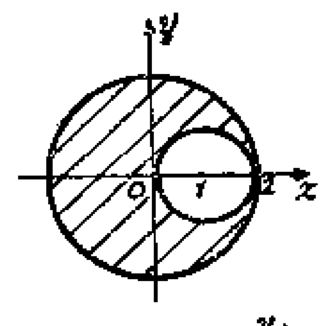
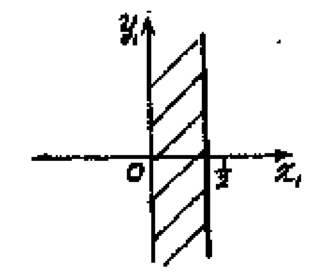


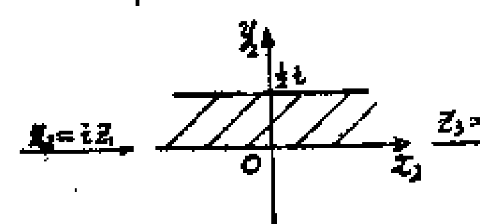
图6.7

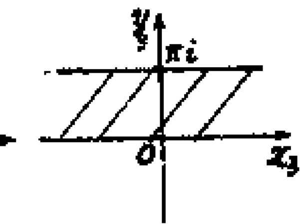


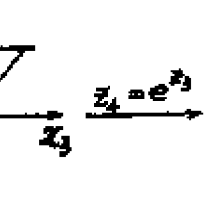
$z_1 = \frac{z}{z-2}$

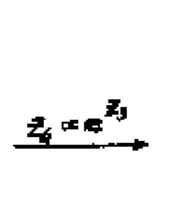


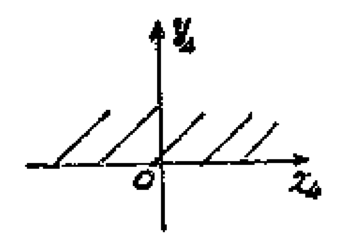
$z_2 = iz_1$











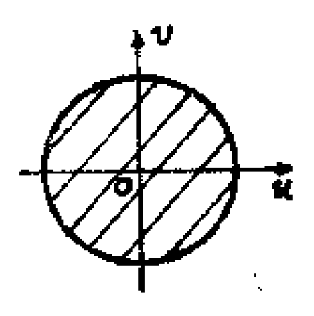


图6.8

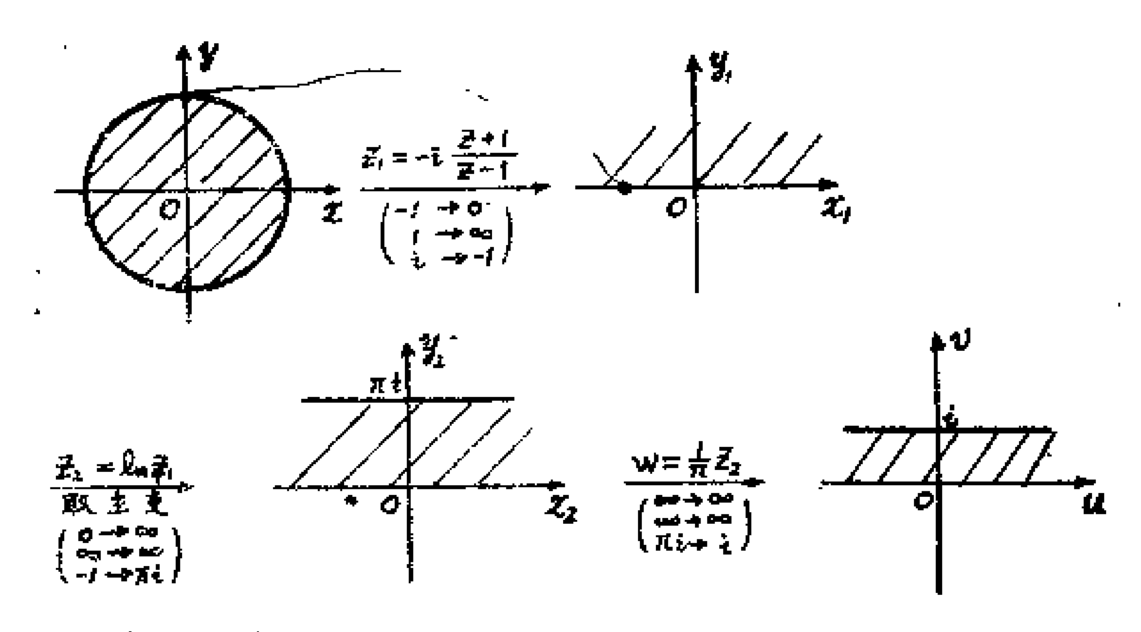
（2）见图6.7

故 $w=\dfrac{\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}+1\right)^2-i\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}-1\right)^2}{\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}+1\right)^2+i\left(z^{\frac{\pi}{\alpha}}-1\right)^2}$ 即为所求。

（3）见第七章解答。

（4）见图 6.8

故 $w=\dfrac{e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}-i}{e^{\frac{2\pi iz}{z-2}}+i}$ 即为所求。



在以正实轴作割线的区域内分成的解析分枝中，点1上沿取ln1＝0的分枝

图6.9

上图一排中式子改为 $z_1=e^{-\frac{\pi}{2}i}\,\dfrac{z+1}{z-1}$

综合得 $w=\dfrac{1}{\pi}\ln\left(-i\,\dfrac{z+1}{z-1}\right)$，容易验证它把－1、1，

i 变为∞，∞，i．故它即为所求的保形映照。

17（第四章第20题）设D是一有界区域，其边界为简单曲线C。设函数$f(z)$在闭区域$\overline{D}$上解析，并且不恒等于一常数。试证：如果$|f(z)|$在C上是常数，那么$f(z)$在D内至少有一零点。

证：用反证法。假设$f(z)$在D内没有零点，又由条件容易推得$f(z)$在D内不为常数。于是根据最大模原理和第四题的结果可知$|f(z)|$不能在D内达到最大值和最小值。

另一方面，因为$f(z)$在闭区域$\overline{D}$上解析，所以$|f(z)|$在$\overline{D}$上连续，故在$\overline{D}$上必可达到最大值和最小值。

由此可见，$|f(z)|$必在边界C上达到最大值和最小值。但$|f(z)|$在C上是常数，从而$|f(z)|$在$\overline{D}$上也为常数，与题设矛盾，因此$f(z)$在D内至少有一零点。

第七章　解析开拓

1．证明对称原理的推广

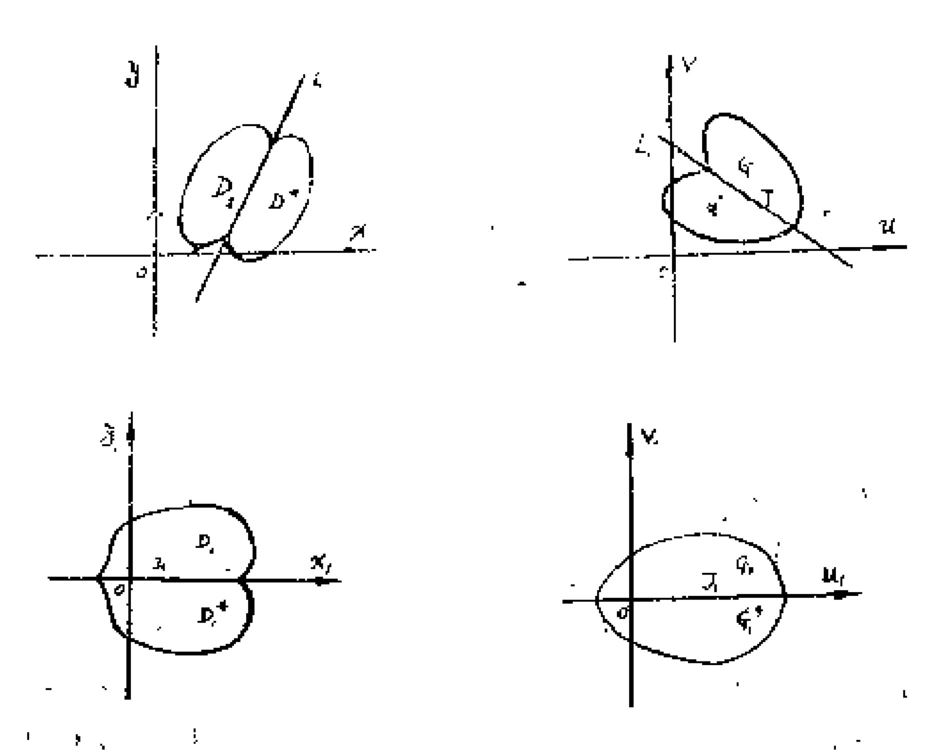
推广到任意直线

设D是在z平面上位于直线L某一边的区域，其边界是一分段光滑简单闭曲线，其中有一段是L上一个线段I（不包含端点）。设函数$W=f(z)$在$D\cup I$连续，在D内解析，而且$J=f(I)$在W平面的某一直线L_1上。考虑与区域D关于L为对称的区域D^*，并且把函数$W=f(z)$的定义扩充到D^*：如果$z^*\in D^*$，并且$z(\in D)$与z^*是关于L对称的，那么$f(z^*)$与$f(z)$是关于L_1的对称点。在这些条件下，$W=f(z)$在$D^*\cup I$上是解析的。

证法一：设$Z=az+b$将L变为Z平面上的实轴，则区域D和D^*分别映照为D_1和D_1^*，I映照为I_1，而I_1在实轴上，且D_1和D_1^*关于实轴对称，它的逆映照$z=\frac{Z}{a}-\frac{b}{a}$则将$D_1$、$D_1^*$和$I_1$分别映照为$D$、$D^*$和$I$。（见图7．1）

同样地，有$W=cw+d$将L_1变为W平面上的实轴，此时区域G和G^*分别映照为G_1和G_1^*。J映照为J_1而J_1在实轴上，且G_1和G_1^*关于实轴对称。它的逆变换$w=\frac{W}{c}-\frac{d}{c}$将$G_1$、$G_1^*$和$J_1$分别映照为$G$、$G^*$和$J$．

考虑复合函数$W=cf(\frac{Z}{a}-\frac{b}{a})+d=F(Z)$，它是$D_1$上



（图7.1）

的解析函数，在 $D_1 \cup I_1$ 上满足对称原理的所有条件，因此它可开拓到关于I_1对称的区域D_1^*上去，成为$D_1 \cup I_1 \cup D_1^*$上的解析函数，且当 $Z \in D_1$，$Z^* \in D_1^*$时，Z和Z^*关于实轴对称，$F(Z)$、$F(Z^*)$关于W平面上的实轴对称。当$z \in D^*$时，对应的$Z(=az+b) \in D_1^*$，若补充规定

$f(z)=\frac{1}{c}F(az+b)-\frac{d}{c}$，则$f(z)$在$D^* \cup D \cup I$上解析，且当$z \in D$，$z^* \in D^*$，$z$和$z^*$关于$L$对称时，$f(z^*)$和$f(z)$关于$L_1$对称。由于变换$z=\frac{Z}{a}-\frac{b}{a}$把$D_1$，$I_1$，$D_1^*$映照到$D$，$I$，$D^*$，可知复合函数$W=F(az+b)=cf(z)+d$在$D \cup I \cup D^*$上解析，因此 $w=\frac{W}{c}-\frac{d}{c}=\frac{1}{c}\left[cf(z)+d\right]-\frac{d}{c}=f(z)$

在$D \cup D^* \cup I$上解析。

证法二：作变换 $Z=az+b$，它将 l 变为 Z 平面上的实轴。将 l 变为 l_1，而 l_1 在 Z 平面的实轴上，将区域 D 和 D^* 分别变为关于 Z 平面上实轴对称的 D_1 和 D_1^*，而关于 L 对称的点 z 和 z^* 分别变为 Z 平面上关于实轴对称的点 Z 和 $\overline{Z}$。

作 $W=cw+d$，它将 L_1 变为 W 平面上的实轴，将 J 变为 J_1 而 J_1 在 W 平面的实轴上，又由于 $w=f(z)$ 在 D 内及 l 上所有点的集合上连续，在 D 内解析，可知

$$W=\Phi(Z)=cf\left(\frac{Z}{a}-\frac{b}{a}\right)+d$$

在 D_1 内及 J_1 上所有点的集合上满足本章定理1.1的条件，因此 $W=\Phi(Z)$ 的定义域能扩充到 D_1^* 上：

$$W=\begin{cases}\Phi(Z)，& 当\ Z\in D_1\\ \overline{\Phi(\overline{Z})}，& 当\ Z\in D_1^*\end{cases}\tag{1}$$

并且它在 $D_1\cup D_1^*\cup l_1$ 上是解析的，它将 Z 平面上关于实轴对称的点 Z 和 $\overline{Z}$ 变为 W 平面上关于实轴对称的点 W 和 $\overline{W}$。我们把（1）仍记作 $W=\Phi(Z)$。

变换（1）经过 $W=cw+d$ 的逆变换 $w=\frac{W}{c}-\frac{d}{c}$ 及变换 $Z=az+b$，得

$$w=\frac{1}{c}\Phi(az+b)-\frac{d}{c}\tag{2}$$

它把 l 变为 J，把关于 L 对称的 z 和 z^* 变成关于 L_1 的对称点，并且它在 $D\cup D^*\cup l$ 上解析。

变换（2）即

$$w=\begin{cases}f(z)，& z\in D，\\ \frac{\overline{c}}{c}\overline{f}\left(\frac{\overline{a}}{a}\overline{z}+\frac{\overline{b}-b}{a}\right)+\frac{\overline{d}-d}{c}，& z\in D^*。\end{cases}\tag{3}$$

因此 $w=f(z)$ 的定义域能根据(3)扩充到 D^*，且扩充定义后满足结论中所述的各条件。

在上面的推广中，若将直线 L、L_1 改为圆周时，上述证明中若将 $Z=az+b$ 和 $W=cw+d$ 改为分式线性变换 $Z=\frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ 和 $W=\frac{a_2w+b_2}{c_2w+d_2}$ 它们分别将圆周 L 和 L_1 变为 Z 平面和 W 平面上的实轴，则知最后结论不变。

2. 设函数 $w=f(z)$ 在 $\mathrm{Im}z\geqslant0$ 上单叶解析，并且把 $\mathrm{Im}z>0$ 保形映照成 $|w|<1$；把 $\mathrm{Im}z=0$ 映照成 $|w|=1$。证明 $f(z)$ 一定是分式线性函数。

证：因为 $w=f(z)$ 把 $\mathrm{Im}z=0$ 映照成 $|w|=1$，所以存在 w_0：$|w_0|=1$，使 $f(\infty)=w_0$，考虑 $w=f(z)$ 的反函数 $z=g(w)$，由于它在 $|w|\leqslant1$ 上除 $w=w_0$ 外是单叶解析的，且在 $|w|=1$ 上（除 $w=w_0$ 外）取实值，故由推广的对称原理，$z=g(w)$ 可经 $|w|=1$（除去 $w=w_0$）解析开拓到圆外，得到在扩充的 w 平面上除 $w=w_0$ 外的单叶解析函数。

另外易知 w_0 是函数 $G(w)=\frac{1}{g(w)}$ 的可去奇点，规定 $G(w_0)=0$，则 $G(w)$ 在 w_0 的邻域内单叶解析，从而 $G'(w_0)\neq0$。因此 w_0 是 $G(w)$ 的一阶零点，故在扩充的 w 平面上 w_0 是 $g(w)$ 的唯一的奇点——一阶极点。由第四章第13题的结果，可知 $g(w)$ 为分式线性函数，由此可知 $f(z)$ 必为分式线性函数。

3. 级数 $-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots$ 在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数是否可以解析开拓为级数 $\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots$ 在 $|z|>1$ 内所定义的函数？

解： $-\frac{1}{z}-1-z-z^2-\cdots=-\frac{1}{z}(1+z+z^2+\cdots)$

$$=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z(1-z)} \qquad 0<|z|<1 \quad (1)$$

$$\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots=\frac{1}{z^2}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots)$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{-1}{z(1-z)} \qquad |z|>1 \quad (2)$$

又函数 $\frac{-1}{z(1-z)}$ 在复平面上除$z=0$和$z=1$外处处解析，故这一函数元素既是函数元素(1)，又是函数元素(2)的直接解析开拓。因此第一个级数在 $0<|z|<1$ 内所定义的函数可以解析开拓为第二个级数在 $|z|>1$ 内所定义的函数。

4．证明：级数 $f_1(z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3\cdots$ 与

$f_2(z)=\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$ 在

$|z|<1$ 与 $|z-1|<2$ 内所定义的函数互为直接解析开拓。

证： ∵ $f_1(z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\cdots=\ln(1+z)$，

$$|z|<1,$$

$$f_2(z)=\ln 2-\frac{1-z}{2}-\frac{(1-z)^2}{2\cdot 2^2}-\frac{(1-z)^3}{3\cdot 2^3}-\cdots$$

$$=\ln 2+\frac{z-1}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{z-1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{2}\right)^3-\cdots$$

$$=\ln 2+\ln\left(1+\frac{z-1}{2}\right)=\ln(1+z).$$

$$|z-1|<2,$$

又在 $|z|<1$ 与 $|z-1|<2$ 的公共部分 $|z|<1$ 内 $f_1(z)=f_2(z)$，所以两个级数所定义的函数互为直接解析开拓。

5．证明级数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n$ 所定义的函数在左半平面内解析，并可解析开拓到除掉点 $z=0$ 外的整个复平面。

证：在级数的收敛区域内，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}$$

其收敛区域为 $\left|\frac{1+z}{1-z}\right|<1$. 而根据模的几何意义知收敛区域即 $x<0$，故该级数所定义的函数在左半平面内解析。

又因 $\frac{1}{1-\frac{1+z}{1-z}}=\frac{z-1}{2z}$ 显然 $z=0$ 为它的奇点，而在 $z\neq 0$ 处它是解析的。因此该级数所定义的函数元素可以解析开拓到除点 $z\neq 0$ 外的整个复平面。

6．证明：如果整函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在实轴上取实值，那么系数 a_n 都是实的。

证法一：因为整函数 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nz^n$ 在复平面上解析，且在实轴上取实值，根据唯一性定理，可以把下半平面上的 $f(z)$ 看作上半平面上的 $f(z)$ 由对称原理解析开拓而得到的，

于是在下半平面应有：$\overline{f(\overline{z})}=f(z)$。

即 $\overline{f(\overline{z})}=\overline{\sum_{n=0}^{\infty}a_n\overline{z}^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a}_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$

因此 $\overline{a}_n=a_n$，这就表示 a_n 是实的 $(n=0, 1, 2, \cdots)$。

证法二：整函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ 在复平面上解析，故在每一点各阶导数都存在，且 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $(n=0, 1, \cdots)$

因为 $f(z)$ 在实轴上取实值，即当 $z=x$ 时，$f(z)=f(x)$ 为实数，从而对任意实数 x_0，$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 是实数。一般地，对任意正整数 n，

$f^{(n)}(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}$ 也是实数，

于是 $a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$，$(n=0,1, 2,\cdots)$ 均为实数

$(f^{(0)}(0)=f(0))$。

7.试问下列实变数实值函数能否解析开拓到复平面上：

(1) $f(x)=|x|$；

(2) $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & (\text{当 } x\neq 0 \text{ 时}), \\ 0 & (\text{当 } x=0 \text{ 时}); \end{cases}$

(3) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上任一点可展开成实幂级数。

解：定义于区间Ⅰ上的实值函数 $f(x)$ 解析开拓到复平面上的意义是：如果存在包含Ⅰ的区域 D 上的解析函数 $F(z)$，

使当 $z=x\in\mathrm{I}$ 时，$F(x)=f(x)$。

（1）$f(x)=|x|$ 不能解析开拓到复平面上。因为 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导。

（2）所给函数 $f(x)$ 不能解析开拓到复平面上，因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内不能展开成幂级数。

（3）在 $[a,b]$ 上取点 x_1，作幂级数

$f(x)=\sum\limits_0^{\infty}a_n^{(1)}(x-x_1)^n$ 在 I_1：$|x-x_1|<r_1$ 收敛，r_1 为收敛半径。将级数中的 x 换成 z 得级数 $\sum\limits_0^{\infty}a_n^{(1)}(z-x_1)^n$ 在 c_1：$|z-x_1|<r_1$ 收敛，c_1 是收敛圆。设其和为 $f_1(z)=\sum\limits_0^{\infty}a_n^{(1)}(z-x_1)^n$。在 $[a,b]$ 上每一点都能作上述幂级数。根据有限覆盖定理，存在有限个点 $x_1,x_2\cdots x_m$。而相应地得有限个幂级数 $f_i(z)=\sum\limits_0^{\infty}a_n^{(i)}(z-x_i)^n$，在 c_i：$|z-x_i|<r_i$ 收敛，c_i 是收敛圆 $(i=1,\cdots m)$。令 $D=\bigcup\limits_1^m c_i$ 显然 $D\supset\mathrm{I}$。则得到在 D 内单值解析函数 $F(z)$。在 c_i 内 $F(z)==f_i(z)$；在 $[a,b]$ 上 $F(x)=f(x)$ 即 $f(x)$ 可开拓到复平面。

8．证明 $f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}z^{n!}$ 的自然边界是 $|z|=1$。

证：先证单位圆 $|z|=1$ 上形如：$z_0=e^{2\pi i\frac{p}{q}}$（$p,q$ 为正整数，且互质）的每一点都是 $f(z)$ 的奇点。

为此令 $z=rz_0=re^{2\pi i\frac{p}{q}}\quad(0<r<1)$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{q-1}z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}z^{n!}$$

当 $n\geqslant q$ 时，$z^{n!}=(rz_0)^{n!}=r^n$。对于 $M=2q+N$，其中 N 是任意大的正整数，有：

$$|f(z)|=\left|\sum_{n=1}^{q-1}z^{n!}+\sum_{n=q}^{\infty}r^{n!}\right|>\sum_{n=q}^{M}r^{n!}-\sum_{n=1}^{q}|z|^{n!}$$

$$>\sum_{n=q}^{M}r^{M!}-\sum_{n=1}^{q-1}1^{n!}=r^{M!}\ (M-q+1)-(q-1)$$

令$r\to1-0$，就有$|f(z)|\geqslant N+2$，亦即可找到$r_0(0<r_0<1)$使得当$r_0<r<1$时，$|f(z)|>N$，由于N是任意大的正整数，所以有$\lim\limits_{r\to1-0}|f(z)|=\infty$，因此 z_0 是 $f(z)$ 的奇点。

其次，设$z=e^{2\pi i\alpha}(\alpha\neq\frac{q}{p})$是单位圆上异于$z_0$的任一点。由于在点 z 的任何邻域内总有形如 z_0 的点，所以，$z=e^{2\pi i\alpha}$ 是形如 z_0 点的聚点，从而是$f(z)$ 的奇点。

所以，单位圆上的每一点都是$f(z)$的奇点，从而$|z|=1$是 $f(z)$ 的自然边界。

9．函数 $w=\sqrt{e^z}$ 是否是多值解析函数？

设：$z=x+iy$，则$w_k=e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{i(\frac{1}{2}y+k\pi)}$ $(k=0,1)$

它们都定义在复平面p上。

显然，点 z 沿任一闭曲线绕行复回原处时，w_0与w_1都分别取其各自的确定值，因此由函数元素(w_0,P)和(w_1,P)中的任何一个都不能借助于解析开拓而得到另一个，所以函数

$w=\sqrt{e^z}$不是多值解析函数，而是代表两个不同的单值解析

析函数：$e^{\frac{z}{2}}$和 $e^{-\frac{z}{2}}$。

10．试作函数 $f(z)=\sqrt{z+1}$ 的黎曼面。

解：我们依次取 $w=\sqrt{z+1}$ 在下半平面、右半平面（$x>-1$）、上半平面及左半平面（$x<-1$）内的解析分枝如下：

$$g_k(z)=\sqrt{|z+1|}\,e^{i\frac{1}{2}\arg(z+1)}$$

$$\left(-\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

并且把这些函数的定义域分别记作 G_k：

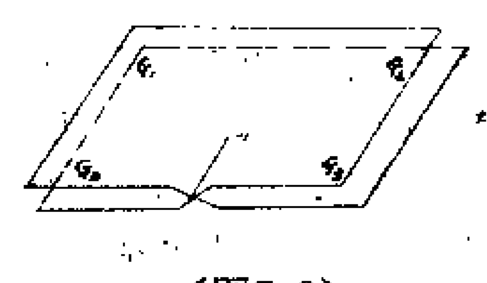
$$-\pi+k\cdot\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<k\cdot\frac{\pi}{2}\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots),$$

考虑函数元素链

$(g_{-1},\ G_{-1})$，$(g_0,\ G_0)$，

(g_1,G_1)，…，$(g_8,\ G_8)$…

凡两函数元素标号彼此相差为8的倍数时，为相同函数元素。因此与上列各解析分枝相对应，只有8个不同的函数元素：



(图7.2)

$$(g_0,\ G_0),\ (g_1,\ G_1),\ \cdots(g_7,\ G_7).\qquad (*)$$

在（*）中，每个函数元素是它相邻的函数元素的直接解析开拓，而（*）中所有函数元素确定一个一般解析函数，即 $w=\sqrt{z+1}$，它是一个双值函数，

把函数元素（g_k，G_k）和（g_{k+4}，G_{k+4}）

($k=0$, 1, 2, 3) 的定义区域看作在不同平面上，并用纸片作出它们的模型，分别粘连 G_k 与 G_{k+1} ($k=0,1,2\cdots,6$) 的公共区域，并且最后粘连 G_7 与 G_0 的公共区域，于是最后得到一个有 2 叶的面，即 $w=\sqrt{z+1}$ 的黎曼面(图7.2)。

-1 和 ∞ 不在上述黎曼面内，它们都是双值函数 $f(z)=\sqrt{z+1}$ 的枝点。

11．试用对称原理把下列图形所示的区域分别保形映照为上半平面：

解（1）见图 7.3

沿（-1，1）作辅助割线，考虑上半个带形 D。

$z_2=f(z)=\dfrac{e^{2z}-\text{ch}2}{\text{sh}2}$ 把区域映照成上半平面 D_2。

令 $I=(-1,\ 1)$（z 平面的实轴上区间）。

则 $I=f(I)=(-1,\ 1)$（z_2 平面的实轴上区间）且 $f(z)$ 在 D 内单叶，在 $D+I$ 上连续，因此可将 $f(z)$ 解析开拓到区域 G 上，且 $f(z)$ 把 G 保形映照为 D_2'，然后利用儒可夫斯基函数的反函数 $w=z_2+\sqrt{z_2^2-1}$（取当 $z_2=0$ 时 $w=i$ 的那一解析分枝）将 D_2' 映照为上半平面 G_1，综合得函数

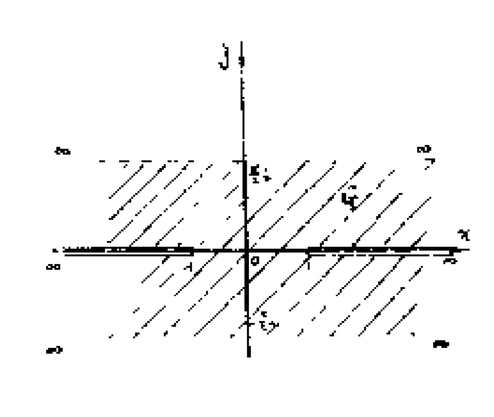
$$w=\frac{e^{2z}-\text{ch}2}{\text{sh}2}+\sqrt{\frac{(e^{2z}-\text{ch}2)^2}{\text{sh}^2 2}-1}$$

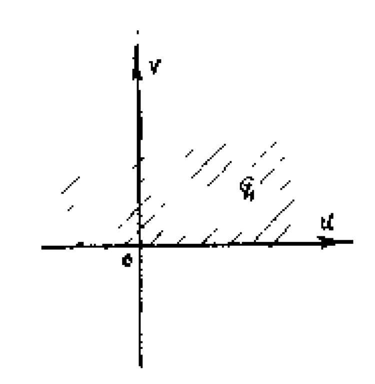
$$=\frac{e^{2z}-\text{ch}2}{\text{sh}2}+\frac{\sqrt{e^{4z}-2e^{2z}\text{ch}2+1}}{\text{sh}2},$$

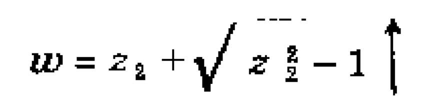
它把 G 保形映照为上半平面 G_1。

解（2）见图 7.4

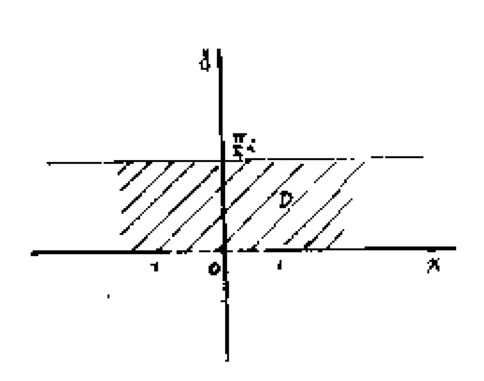
沿（$-\infty$，-1），（1，$+\infty$）作辅助割线，考虑上半平

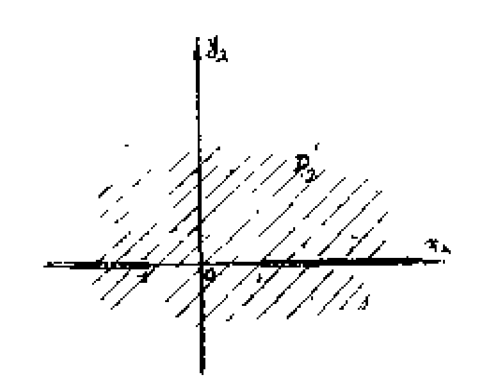






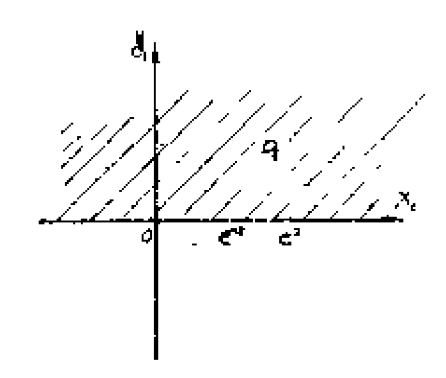
$$w = z_2 + \sqrt{z_2^2 - 1}$$





$$z_1 = e^{2z}$$

$$z_2 = \frac{z_1 - \mathrm{ch}\,2}{\mathrm{sh}\,2}$$



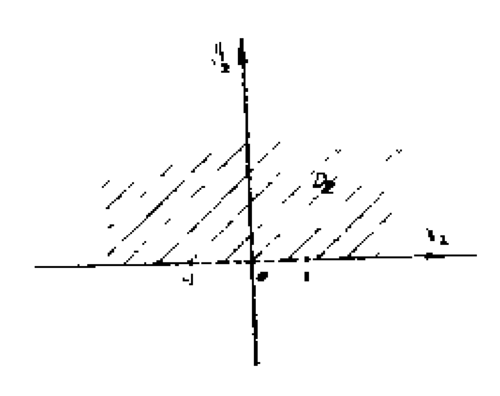
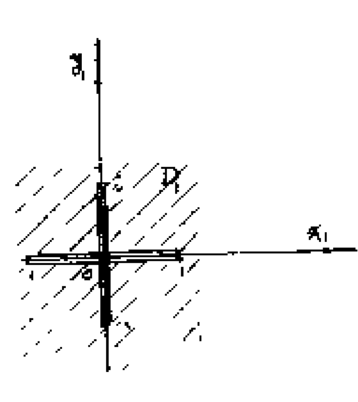
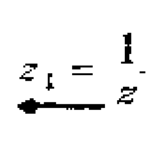
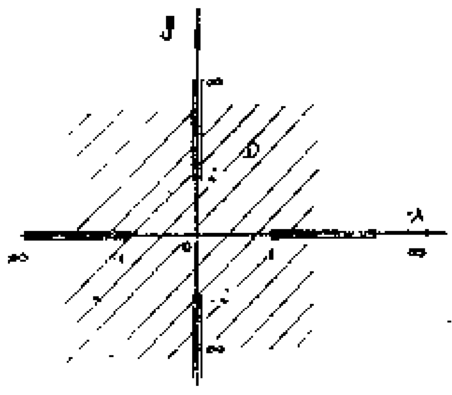
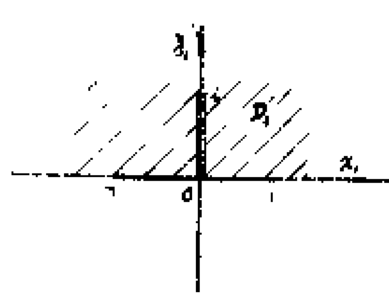


图7.3

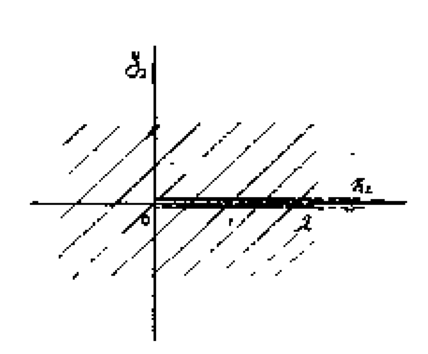


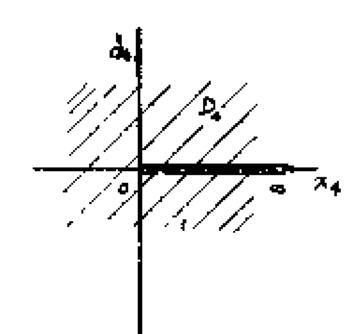




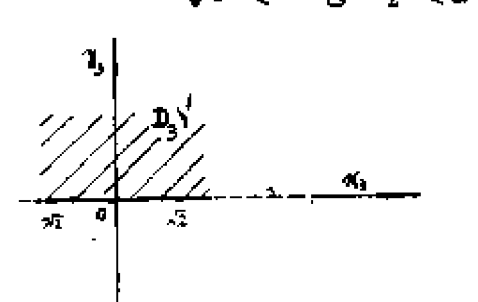


$z_2 = z_1^2 + 1 \downarrow$ $\qquad$ $w = \sqrt{z_4} \uparrow 0 < \arg z_4 < 2\pi$





$z_3 = \sqrt{z_2} \downarrow 0 < \arg z_2 < 2\pi$ $\qquad$ $z_4 = \frac{\sqrt{2} - z_3}{\sqrt{2} + z_3} \uparrow$



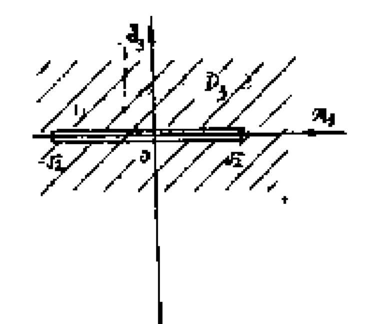


图7.4

面D_1'，函数$z_3=\sqrt{z_1^2+1}$，在D_1'符合对称原理条件，故它可通过实轴上区间$I=(-\infty,\ -1)\cup(1,\ \infty)$解析开拓到区域$D_1$上，并将$D_1$映照为$D_3$，令$z_4=\frac{\sqrt{2}-z_3}{\sqrt{2}+z_3}$，它把$D_3$映照成$D_4$，$w=\sqrt{z_4}$将$D_4$映照成上半平面$G$，最后得
$w=\sqrt{\frac{\sqrt{2}z-\sqrt{1+z^2}}{\sqrt{2}z+\sqrt{1+z^2}}}$，它把$D$保形映照为上半平面$G$.

12. 证明：把z平面上的单位圆盘双方单值保形映照成w平面上多角形p的映照公式是

$$w=C\int_{z_0}^{z}\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}dz+C'$$

其中β_k是p的各顶角的弧度，z_k是$|z|=1$上与p的各顶点相对应的点，z_0，C，C'是复常数。

证：设$\zeta=\frac{z-i}{z+i}$将单位圆盘$|z|\leqslant 1$双方单值地保形映照成上半平面$\mathrm{Im}\,\zeta\geqslant 0$，且

$$a_k=\frac{z_k-i}{z_k+i},\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

已知将$\mathrm{Im}\,\zeta\geqslant 0$双方单值保形映照成$w$平面上多角形$p$的映照是

$$w=C_0\int_{\zeta_0}^{\zeta}\prod_{k=1}^{n}(\zeta-ak)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}d\zeta+C_1,$$

式中ζ_0，C_0及C_1是常数。

将$\zeta=\frac{z-i}{z-i}$，$a_k=\frac{z_k-i}{z_k-i}$代入上式，得

$$w=C_0\int_{z_0}^{z}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{z-i}{z+i}-\frac{z_k-i}{z_k+i}\right]^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}\right\}\frac{2i}{(z+i)^2}dz+C_1$$

$$\left(z_0=\frac{z_0-i}{z_0+i}\right)$$

$$=C_0\int_{z_0}^{z}\left\{\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{2i(z-z_k)}{(z+i)(z_k+i)}\right]^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}\right\}\frac{2i}{(z+i)^2}dz+C_1$$

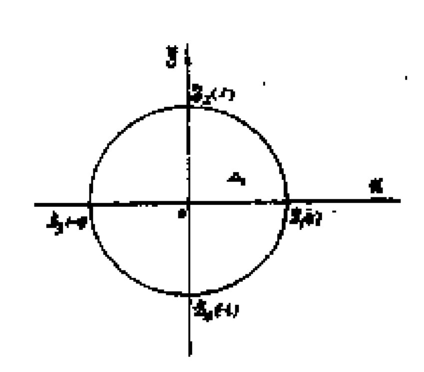
由于$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=(n-2)\pi$，所以$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\beta_k}{\pi}-1\right)=-2$，

故 $w=C\int_{z_0}^{z}\sum_{k=1}^{n}(z-z_k)^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}dz+C'$，其中

$$C=2iC_0\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{2i}{z_k+i}^{\frac{\beta_k}{\pi}-1}\right),\ C'=C_1.$$

13. 求作把单位园盘映照成正方形内部的单叶函数。

解：将正方形放在如图7.5所示的位置上，依黎曼存在



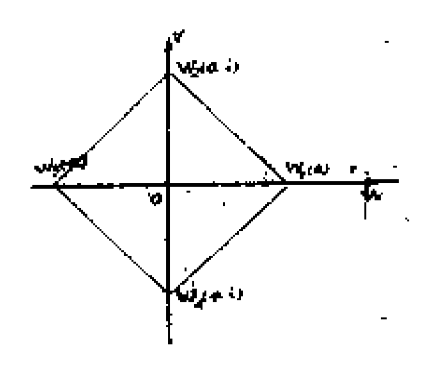


图7.5

定理，必存在单叶函数$w=f(z)$把z平面上第一象限的园域$\triangle_1$映照为w平面上第一象限的三角形域$\triangle'_1$，且把三点O，

z_1, z_2分别映照为三点O, w_1, w_2。利用对称原理，$w=f(z)$将单位园盘映照为所述的正方形内部，且分别把z_1, z_2, z_3和z_4映照为w_1, w_2, w_3和w_4。

利用第12题的公式，有：

$$w=C\int_0^z (z-1)^{-\frac{1}{2}}(z-i)^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{-\frac{1}{2}}(z+i)^{-\frac{1}{2}}dz+C_1$$

$$=C\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^4-1}}+C_1=\frac{C}{i}\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}+C_1$$

此处$\sqrt{1-z^4}$在单位园$|z|<1$内解析，取$\sqrt{1-z^4}\,|_{z=0}=1$的那个解析分枝。

$z=1$时，$w=a$，从而$a=\frac{C}{i}\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$，利用推广的柯西定理，可证积分与路径无关，故可取实轴上区间[0,1]作为积分路径。作变量代换，设$z^4=t$，$dz=\frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}}$，

$z=1$时，$t=1$ 从而 $a=\frac{C}{i}\int_0^1 \frac{dt}{4t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t}}=$

$=\frac{C'}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$。此处$C'=\frac{C}{i}$。

利用公式$\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$，得：

$$a=\frac{C'}{4}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{C'\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{4\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)},$$

$$\therefore \quad C' = \frac{4a\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

又由$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，$\Gamma(n)\Gamma(1-n)=\frac{\pi}{\sin n\pi}$，

取 $n=\frac{3}{4}$，得 $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\pi$，

故 $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$。 $\therefore\ C'=\frac{4a\sqrt{2}\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}$。

$$\therefore \quad w=\frac{4a\sqrt{2}\pi}{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}.$$

14. 用多角形映照公式，把扩充 z 平面上单位园的外部 $|z|>1$映照成扩充w平面上去掉割线 $-1\leqslant \mathrm{Re}w\leqslant 1, \mathrm{Im}w=0$ 而得的部分。

解：把单位园的外部映照为多角形的外部（$z=\infty$ 对应于$w=\infty$）的映照公式*为：

$$w=c\int_{z_0}^{z}(z-a_1)^{\alpha_1-1}(z-a_2)^{\alpha_2-1}\cdots(z-a_n)^{\alpha_n-1}\frac{dz}{z^2}+c_1.$$

式中 $\alpha_k=\frac{\beta_k}{\pi}(k=1,2,\cdots n)$，$a_k$ 为单位园周上对应于多角形顶点的哪些点，c 和c_1为常数。

---

* 参看斯米尔诺夫著高等数学教程第三卷第二分册第二章§38(62)式。

由于w平面的多角形可看作一个两边形，顶点为1和-1，且$\beta_1=\beta_2=2\pi$。

在单位园上取$a_1=-1$，$a_2=1$，相应于$w_1=-1$，$w_2=1$，则有：

$$w=c\int_i^\zeta(\zeta+1)(\zeta-1)\frac{d\zeta}{\zeta^2}+c_1$$

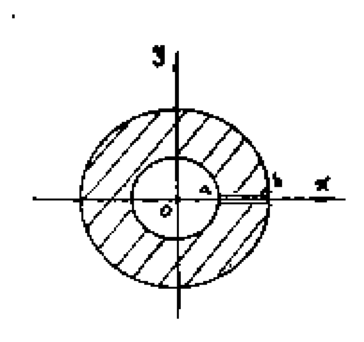
$$=c\int_i^\zeta\left(1-\frac{1}{\zeta^2}\right)d\zeta+c_1=c\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)+c_1$$

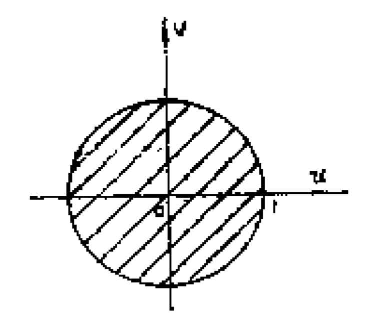
利用关系$-1\longrightarrow-1$，$1\longrightarrow1$，　可得$c_1=0$，$c=\frac{1}{2}$，

$$\therefore\quad w=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right).$$

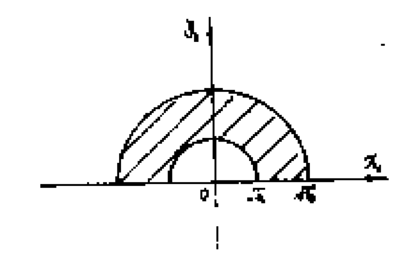
15．〔第六章第16（3）题〕试作保形映照：
把园环　$0<a<|z|<b$除去实轴上的区间(a,b)而得的区域映照成$|z|<1$。

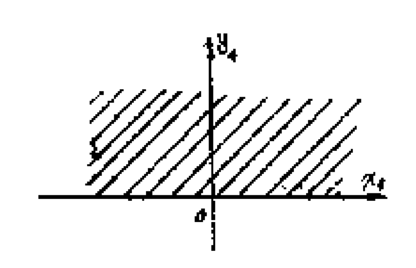
解：见图 7.6.

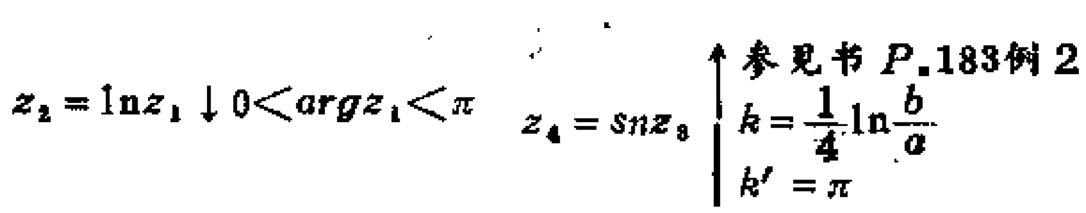


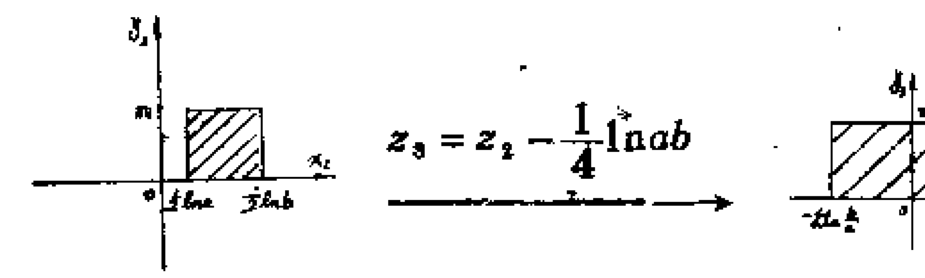


$z_1=\sqrt{z}\ \downarrow\ 0<\arg z_1<2\pi$　　$\uparrow\ w=\dfrac{z-i}{z+i}$









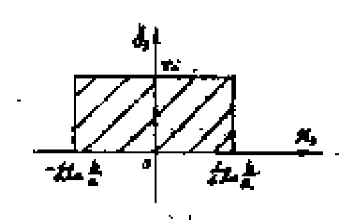


图 7.6

第八章　调和函数

1．设函数$f(z)$在区域D内解析，而且不等于零。直接计算证明：在D内，$\Delta \ln|f(z)|=0$，若补充规定$|f'(z)|\neq 0$则$\Delta|f(z)|>0$。

证：因为$f(z)=u+iv$在D内解析，所以u，v满足$C-R$条件：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$和拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial v^2}{\partial y^2}=0.$$

在D内由$f(z)\neq 0$，可设

$$F(x,y)=\ln|f(z)|=\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2),$$

于是：$\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{u^2+v^2}\left(u\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)$，

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{2}{(u^2+v^2)^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\ \frac{\partial v}{\partial x}\right]$$

同理可得：

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{1}{u^2+v^2}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{2}{(u^2+v^2)^2}\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial y}\ \frac{\partial v}{\partial y}\right],$$

从而$\Delta \ln|f(z)|=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=0$

设$E(x,y)\equiv|f(z)|=\sqrt{u^2+v^2}$，则

$$\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\cdot\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right],$$

类似地有：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+v\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{1}{(\sqrt{u^2+v^2})^3}\cdot\left[u^2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+v^2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2uv\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right],$$

于是由$f(z)\neq 0$和$f'(z)\neq 0$可得：

$$\Delta|f(z)|=\frac{\partial^2 E}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 E}{\partial y^2}=\frac{|f'(z)|^2}{|f(z)|}>0.$$

2．求一解析函数，使其实部为$e^x(x\cos y-y\sin y)$。

解：设$u(x,y)=e^x(x\cos y-y\sin y)$。在整个复平面上，经过简单计算容易得出，它的一阶二阶偏导数连续，且适合拉普拉斯方程，故知它为调和函数。

下求与$u(x,y)$共轭的调和函数$v(x,y)$。取自(x_0,y_0)到(x,y_0)，及由(x,y_0)到(x,y)的直线段作为积分路线，得：

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$=\int_{x_0}^{x}e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)dx+$$

$$+\int_{y_0}^{y} e^x(x\cos y - y\sin y + \cos y)dy + c$$

$$= e^x(x\sin y + y\cos y) + c_1,$$

$$\therefore \quad f(z) = u + iv = e^x(x + iy)(\cos y + i\sin y) + ic_1$$

$$= ze^z + ic_1.$$

即为所求解析函数，其中 c_1是实常数。

3．试求形如 $ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$ 的最一般的调和函数，其中 a，b，c 及 d 是实常数。

解：设 $u = ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3$，

按条件要求，应有$\triangle u = 0$，即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x(3a+c) + 2y(b+3d) = 0$$

故得：$c = -3a$，$b = -3d$。

故所求的最一般的调和函数是：

$$a(x^3 - 3xy^2) + d(y^3 - 3x^2y) = a\mathrm{Re}(z^3) + id\mathrm{Im}(z^3)$$

其中 a，d 为任意实常数。

4．设实变数实值函数$u(x,y)$是在$0<|z|<\rho(<+\infty)$内的有界调和函数，证明适当定义 $u(0,0)$ 后，$u(x,y)$ 是在$|z|<\rho$内的调和函数。

证法一：研究$u(z)$在D：$0<|z|<\rho$ 内的共轭调和函数$v(z)$：

$$v(z) = \int_{z_0}^{z} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + c \qquad (*)$$

上式中的 c 是某一确定的复常量，积分路线是联结z_0和 z 且在D内的任一简单逐段光滑曲线。设γ是在D内的逐段光滑的简单闭曲线，则当 z 沿γ的正向绕行一周时，$v(z)$有增量

$$\Gamma = \int_{\gamma} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

于是（＊）式可写或 $v(z) = v_0(z) + k\Gamma + c$

其中$v_0(z)$是（＊）中积分的某一枝．k为任意整数．

当 $\Gamma = 0$ 时，$v(z)$是 D 内的单值调和函数，从而 $f(z) = u(z) + iv(z)$ 是D内的单值解析函数，于是 $g(z) = e^{f(z)} = e^{u(z)+iv(z)}$ 也是D内的单值解析函数。又由 $u(z)$在D内有界知 $g(z)$ 也在D内有界，因此 $z=0$ 是 $g(z)$的可去奇点。规定 $g(0) = \lim\limits_{z\to 0} g(z)$；相应地就规定了 $u(0,0) = \lim\limits_{z\to 0} u(z)$．作了这样的规定后，$g(z)$在$|z|<\rho$ 内解析，因而$f(z)$在$|z|<\rho$内解析．从而 $u(z)$在$|z|<\rho$内调和。

当 $\Gamma \neq 0$时，$f(z) = u(z) + iv(z) - \frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$ 在D内单值解析。这是因为当 z 沿 γ正向（负向）绕行一周时，iv 有增量$i\Gamma(-\Gamma)$，而$-\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z$ 有增量$-i\Gamma(i\Gamma)$，从而 $f(z)$ 无增量，并且 $f(z)$的实部与虚部互为共轭调和函数。令

$$g(z) = e^{\frac{2\pi}{\Gamma}(u+iv)} = ze^{\frac{2\pi}{\Gamma}f(z)}.$$

它也是D内的单值解析函数。又 $|g(z)| = |z|e^{\frac{2\pi}{\Gamma}u(z)}$，可知$g(z)$在$D$内有界，因此 $z=0$ 是 $g(z)$的可去奇点。仿照上面的讨论，可证得：适当规定$u(0,0)$后，$u(z)$在$|z|<1$内调和。

证法二：设 $u_1(x,y) = u_1(r,\theta)$，它是在 $0<|z|<\rho$ 内的单值调和函数，相应地有共轭调和函数 $v(x,y) = v_1(r,\theta)$

及解析函数 $f(z)=u+iv$。于是 $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$ 显然是单值解析函数，从而在 $0<|z|<\rho$ 内可展为罗朗级数：

$$f'(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}A_n z^n.$$

由此得：$f(z)=A+A_{-1}\mathrm{Ln}z+\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{A_n z^{n+1}}{n+1}$，$(n\neq-1)$

从而 $u_1(r,\theta)=\alpha+\alpha_{-1}\ln r-\beta_{-1}\mathrm{Arg}z+$

$$+\sum_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n}{n+1}\cos(n+1)\theta-\frac{\beta_n}{n+1}\sin(n+1)\theta\right]r^{n+1}\ (*)$$

其中 $n\neq-1$，$\alpha=\mathrm{Re}A$，$A_n=\alpha_n+i\beta_n$，

$$z=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

由 $u_1(r,\theta)$ 的单值性可知 $\beta_{-1}=0$，而由 $u_1(r,\theta)$ 的有界性可推得 $\alpha_{-1}=0$。把(*)式两端同乘以 $\cos m\theta$，（m 为大于1的正整数）并在 $[0,2\pi]$ 上积分，则有

$$\int_0^{2\pi}u_1(r,\theta)\cos m\theta d\theta=\pi\frac{\alpha_{m-1}}{m}r^m+\pi\frac{\alpha_{-(m-1)}}{m}r^{-m}.$$

对于每个确定的 m，以上等式左端始终是有界的，而右端当 r 充分小时，第一项有界，第二项可变得任意大，因此要使等式成立，必有：$\alpha_{-(m-1)}=0$ $(m=2,3\cdots)$。

同样，等式(*)两端乘以 $\sin m\theta$，并作类似的讨论，即得：$\beta_{-(m-1)}=0$ $(m=2,3\cdots)$。

可见 $u_1(r,\theta)=\alpha+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{\alpha_n}{n+1}\cos(n+1)\theta-\right.$

$\left.-\frac{\beta_n}{n+1}\sin(n+1)\theta\right]r^{n+1}$ 因此，若规定 $u(0,0)=\alpha$，

则显见 $u(x,y)=u_1(r,\theta)$ 就是在 $|z|<\rho$ 内的调和函数。

5. 试用调和函数的中值公式，证明

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0,\ (-1<r<1).$$

证：当$0\leqslant r<1$时，考虑函数$\mathrm{Ln}(1-z)$在$|z|<1$内的一个解析分枝，记为 $\ln(1-z)$。显然$u(z)=\mathrm{Re}[\ln(1-z)]$在$|z|<1$ 内调和，且有 $u(0)=\mathrm{Re}[\ln 1]=0$。

在圆 $|z|=r<1$ 上，有：

$$u(re^{i\theta})=\mathrm{Re}[\ln(1-z)]=\ln|1-re^{i\theta}|$$

$$=\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos\theta+r^2).$$

应用调和函数的中值公式，可得：

$$u(0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{i\theta})d\theta.$$

即

$$0=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta$$

$$=\frac{2}{4\pi}\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta$$

于是当$0\leqslant r<1$时，$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta=0$

当$-1<r\leqslant 0$时，可考虑$\ln(1+z)$在$|z|<1$内的一个解析分枝，在 $|z|=r_1<1$ 上作类似于上述的讨论，即可证得：

$$\int_0^{\pi}\ln(1+2r_1\cos\theta+r_1^2)d\theta=0,\quad (0\leqslant r_1<1).$$

于是当$-1<r\leqslant 0$时，

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta$$

$$=\int_0^{\pi}\ln[1+2(-r)\cos\theta+(-r)^2]d\theta$$

$$\underline{\underline{r_1 = -r}}\int_0^{\pi}\ln(1+2r_1\cos\theta + r_1^2)d\theta = 0$$

故由以上讨论可知：

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos\theta+r^2)d\theta = 0, \quad (-1<r<1).$$

6．证明：如果在整个 z 平面的调和函数 $u(z)$ 是有界的那么 $u(z)$ 恒等于常数。

证法一：在复平面上任取一点 $z_1 = re^{i\theta}$ 使 $0\leqslant r<\rho$。显然 $u(z)$ 是在 $|z|\leqslant\rho$ $(0<\rho<+\infty)$ 上的调和函数，并且 $|u(z)|\leqslant M$（常数）。

由普阿松公式，可知：

$$u(z_1) = u(re^{i\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi}) \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi.$$

$$|u(z_1) - u(0)| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho e^{i\varphi})\left(\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)+r^2} - 1\right)d\varphi\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{2\rho r\cos(\varphi-\theta) - 2r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r\cos(\varphi-\theta)}u(\rho e^{i\varphi})\right|d\varphi$$

$$\leqslant M\cdot\frac{2\rho r + 2r^2}{(\rho - r)^2}$$

令 $\rho\to+\infty$，立即可得 $u(z_1) = u(0)$，由于 z_1 的任意性，故 $f(z)$ 恒等于常数 $u(0)$。

证法二：因为 $u(z)$ 是在整个平面上调和的函数，所以存在一个函数 $f(z)$，它在整个平面上解析，并且 $\mathrm{Re}f(z) = u(z)$，又 $|u(z)|\leqslant M$（M 是正的常数）。

考虑函数 $e^{f(z)}$，显然它也在整个 z 平面上解析，并且

$|e^{f(z)}|=e^{u(z)}\leqslant e^{M}$。因此，根据刘维尔定理，可知 $e^{f(z)}$ 是常数，从而 $u(z)$ 也是常数。

7．试求在单位圆盘内的调和函数，使其在单位圆的一段弧上取值1，而在圆上其余部分取值0。

解：设 $u(e^{i\varphi})=\begin{cases}1, & 0<\alpha<\varphi<\beta<2\pi\\ 0, & 0\leqslant\varphi\leqslant\alpha,\ \text{或}\ \beta\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.\end{cases}$

由单位圆盘的普瓦松公式得：

$$u(re^{i\theta})=\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi(1+r^2)}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-r^2)d\varphi}{1-\frac{2r}{1+r^2}\cos(\varphi-\theta)}$$

$$=\frac{1}{2\pi(1+r^2)}\int_{\alpha}^{\beta}\frac{(1-r^2)d\varphi}{1+\frac{2r}{1+r^2}\cos(\varphi-\theta-\pi)}$$

$$=\frac{1-r^2}{2\pi(1+r^2)}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-\left(\frac{2r}{1-r^2}\right)^2}}\cdot$$

$$\cdot\operatorname{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{2r}{1-r^2}}{1+\frac{r^2}{1+r^2}}}\operatorname{tg}\frac{\varphi-\theta-\pi}{2}\right)\Bigg|_{\alpha}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-r)\operatorname{tg}\frac{\beta-\theta-\pi}{2}}{1+r}-\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-r)\operatorname{tg}\frac{\alpha-\theta-\pi}{2}}{1+r}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-r)\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\theta}{2}}{1+r}-\operatorname{arc\,tg}\frac{(1-r)\operatorname{ctg}\frac{\beta-\theta}{2}}{1+r}\right].$$

8. 试求在上半平面内的调和函数 $u(z)$，使其在实轴上取值如下：

$$u(t)=\begin{cases}0 & ，(当\ t<-1\ 时)，\\ v & ，(当\ -1<t<0\ 时)，\\ (v_2-v_1)t+v_1， & (当\ 0<t<1\ 时)，\\ 0 & ，(当\ t>1\ 时)，\end{cases}$$

解：由上半平面的普瓦松公式

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{0}\frac{vydt}{(t-x)^2+y^2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{[(v_2-v_1)t+v_1]y}{(t-x)^2+y^2}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_{-1}^{0}\frac{vydt}{(t-x)^2+y^2}+\right.$$

$$\left.+\int_0^1\frac{[(v_2-v_1)(t-x)+x(v_2-v_1)+v_1]y}{(t-x)^2+y^2}dt\right)$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{v(\text{arc tg}\frac{-x}{y}-\text{arc tg}\frac{-1-x}{y})+\right.$$

$$+\frac{y(v_2-v_1)}{2}[\ln((1-x)^2+y^2)-\ln(x^2+y^2)]+$$

$$\left.+[x(v_2-v_1)+v_1](\text{arc tg}\frac{1-x}{y}-\text{arc tg}\frac{-x}{y})\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(v\,\text{arc tg}\frac{y}{y^2+(1+x)x}+\right.$$

$$+\frac{y}{2}(v_2-v_1)\ln\frac{(1-x)^2+y^2}{x^2+y^2}+$$

$$\left.+[x(v_2-v_1)+v_1]\,\text{arc tg}\frac{y}{y^2-(1-x)x}\right].$$

第九章　解析函数对平面场的应用

1.研究以下列各函数作为复势的平面稳定流动：

(1) $w=z^2$。

解：在任一点$z\neq 0$的速度是$\overline{f'(z)}=2\overline{z}$，

流函数是$\psi(x,y)=2xy$，

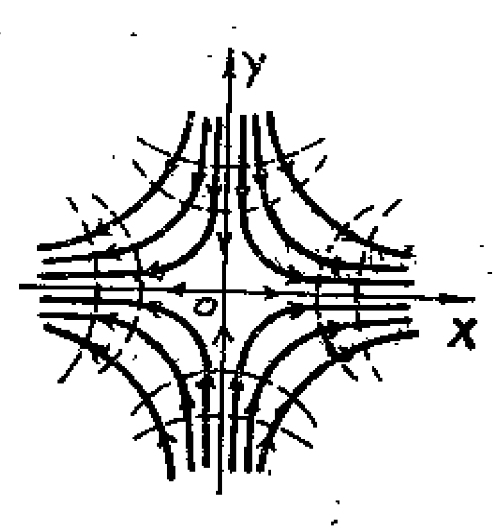
所以流线是曲线$xy=c_1$。

势函数是$\varphi(x,y)=x^2-y^2$，

所以等势线是曲线

$$x^2-y^2=c_2。$$

流体分别从平面上下两方用相同的速度流动，而在实轴相遇（图9.1）。



(图9.1)

原点是临界点。速度等于零。

(2) $w=\sqrt{z}$。

解：用极坐标表示为：$\sqrt{z}=\rho^{\frac{1}{2}}e^{\frac{i\theta}{2}}$

故流函数是 $\psi=\rho^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta}{2}$，流线的方程是 $\rho=\dfrac{c_1}{\sin^2\frac{\theta}{2}}$。

势函数是 $\varphi=\rho^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta}{2}$，等势线的方程为 $\rho=\dfrac{c_2}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$

(3) $w = z + \frac{1}{z}$.

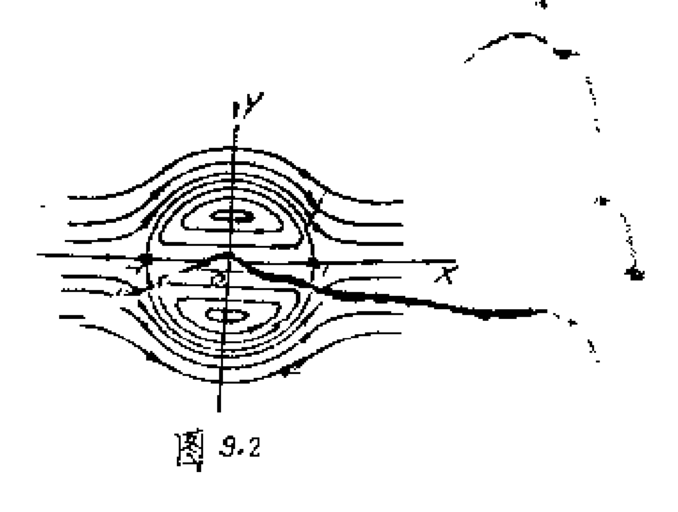


图 9.2

解：在任一点$(z \neq 0)$的速度是 $\overline{f'(z)} = \overline{1 - \frac{1}{z^2}} = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2}$

$$= 1 + \frac{(y^2 - x^2) - i2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

流函数是$\psi(x, y) =$

$= y - \frac{y}{x^2 + y^2}$，流线的

方程为$y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c_1$，当$c_1 = 0$时，它由圆周$x^2 + y^2 = 1$与$y = 0$组成（图 9.2）

势函数是 $\varphi(x, y) = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$，

等势线为 $x + \frac{x}{x^2 + y^2} = c_2$.

(4) $w = \frac{1}{z^2}$.

解：在任一点（$z \neq 0$）的速度是$\overline{f'(z)} = -\frac{2}{\bar{z}^3}$.

流函数是 $\psi(x, y) = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$，流线方程是

$$\frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} = c_1$$

势函数是 $\varphi(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$，等势线方程是

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=c_3.$$

2．求速度为$f(z)$的平面稳定流动沿圆 c 的环量，在这里我们分别设：

(1) $f(z)=\operatorname{tg}\pi z$，$c$为$|z|=n$，其中 n 是正整数；

(2) $f(z)=\frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}$，$c$为$|z|=R+1$，其中$R>0$。

解：(1) $\int_c f(z)dz=\int_c \operatorname{tg}\pi z dz=\int_c \frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}dz$

$\cos\pi z$ 在 c 内有 $2n$ 个简单零点，即

$$z=-n+\frac{1}{2},-n+\frac{3}{2},\cdots-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,n-\frac{3}{2},\quad n-\frac{1}{2};$$

因 $\cos\pi z$的$2n$个简单零点是 $\operatorname{tg}\pi z$ 的简单极点，且 $\operatorname{tg}\pi z$ 再无其它奇点，而每一极点处的留数为$\frac{\sin\pi z}{(\cos\pi z)'}=-\frac{1}{\pi}$

故 $$\int_c \operatorname{tg}\pi z dz=2\pi i\cdot 2n\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=-4ni.$$

因此 $\Gamma=\operatorname{Re}(-4ni)=0$。

(2) $$\int_c \frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2}dz=\int_c \frac{z^2-1}{(z-R)^2(z+R)^2}dz,$$

c：$|z|=R+1$，$z=\pm R$ 为$f(z)=\frac{z^2-1}{(z-R)^2(z+R)^2}$的二阶极

$$\operatorname{Res}(f,R)=\lim_{z\to R}\frac{d}{dz}\left[(z-R)^2 f(z)\right]$$

$$=\lim_{z\to R}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2-1}{(z+R)^2}\right]$$

$$= \lim_{z \to R} \frac{2(zR+1)}{(z+R)^3} = \frac{2(R^2+1)}{(2R)^3} = \frac{1}{4R} + \frac{1}{4R^3}$$

$$\text{Res}[f, -R] = \lim_{z \to -R} \frac{d}{dz}[(z+R)^2 f(z)]$$

$$= \lim_{z \to -R} \frac{d}{dz}\left\{\frac{z^2-1}{(z-R)^2}\right\} = \lim_{z \to -R} \frac{2(1-Rz)}{(z-R)^3}$$

$$= \frac{2(1+R^2)}{(-2R)^3} = -\left(\frac{1}{4R} + \frac{1}{4R^3}\right)$$

$$\therefore \int_c \frac{z^2-1}{(z^2-R^2)^2} dz = 2\pi i\{\text{Res}[f(z), R] + \text{Res}[f(z), -R]\} = 0$$

从而 $\Gamma = 0$。

3．平面静电场的势函数是$v = arctg\frac{tg\pi y}{\text{th}\pi x}$，试求电力线的方程与复势。

解：$\because \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-1}{1+\left(\frac{tg\pi y}{\text{th}\pi x}\right)^2}\left(-\frac{\pi \text{tg}\pi y}{\text{sh}^2\pi x}\right)$

$$= \frac{1}{1+\frac{\sin^2\pi y \,\text{ch}^2\pi x}{\text{sh}^2\pi x \cos^2\pi y}}\left(\frac{\pi \sin\pi y}{\text{sh}^2\pi x \cos\pi y}\right)$$

$$= \frac{\pi \cos\pi y \sin\pi y}{\text{sh}^2\pi x \cos^2\pi y + \sin^2\pi y \,\text{ch}^2\pi x}$$

$$= \frac{\pi \cos\pi y \sin\pi y}{\text{sh}^2\pi x + \sin^2\pi y}$$

同样可求得：$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\pi \,\text{sh}\pi x \,\text{ch}\pi x}{\text{sh}^2\pi x + \sin^2\pi y}$

$$\therefore\quad du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$=\frac{\pi\,\mathrm{sh}\pi x\,\mathrm{ch}\pi x}{\mathrm{sh}^2\pi x+\sin^2\pi y}dx+\frac{\pi\sin\pi y\cos\pi y}{\mathrm{sh}^2\pi x+\sin^2\pi y}dy$$

$$=d\ln\sqrt{\mathrm{sh}^2\pi x+\sin^2\pi y}$$

又 $\mathrm{sh}\pi z=\mathrm{sh}(\pi x+i\pi y)=\mathrm{sh}\pi x\,\mathrm{ch}\,i\pi y+\mathrm{ch}\pi x\,\mathrm{sh}\,i\pi y$

$$=\mathrm{sh}\pi x\cos\pi y+i\,\mathrm{ch}\,\pi x\sin\pi y$$

$$\therefore\quad|\mathrm{sh}\pi z|=\sqrt{\mathrm{sh}^2\pi x\cos^2\pi y+\mathrm{ch}^2\pi x\sin^2\pi y}$$

$$=\sqrt{\mathrm{sh}^2\pi x+\sin^2\pi y}$$

从而 $du=d\ln|\mathrm{sh}\pi z|$，由此推得电力线的方程为：

$u=\ln|\mathrm{sh}\pi z|+c_1$，即$|\mathrm{sh}\pi z|=c_2$，复势为

$$\Phi(z)=\ln\mathrm{sh}\pi z+c_。$$

4．平面静电场的等势线为圆周 $x^2+y^2=2ax$，其中 a 为一实数，求在 $(2a,\ 0)$与$(a,\ a)$的电场强度大小的比。

解：∵ 等势线为$x^2+y^2=2ax$，

故势函数为 $v=\dfrac{x^2+y^2}{2x}$。

但$E=\sqrt{\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$，

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2x^2},\quad\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{y}{x}。$$

$$\therefore E=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2x^2}\right)^2+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)$$

$$E_1=\frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)_{\substack{x=2a\\y=0}}=\frac{1}{2}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)_{x=y=a} = 1 \quad \therefore \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}.$$

5. 设在射线 $x=0$，$y \geqslant a(>0)$ 上，电势为V_0，而在实轴上为零，求所产生的静电场。

解：求静电场的复势就是找一函数 $w=f(z)$，使已知区域D保形映照成w平面上的带形 $0<\mathrm{Im}w<V_0$，而使射线，实轴分别与 $\mathrm{Im}w=V_0$，$\mathrm{Im}w=0$ 相对应。按下面的映照（图9.3）来完成，

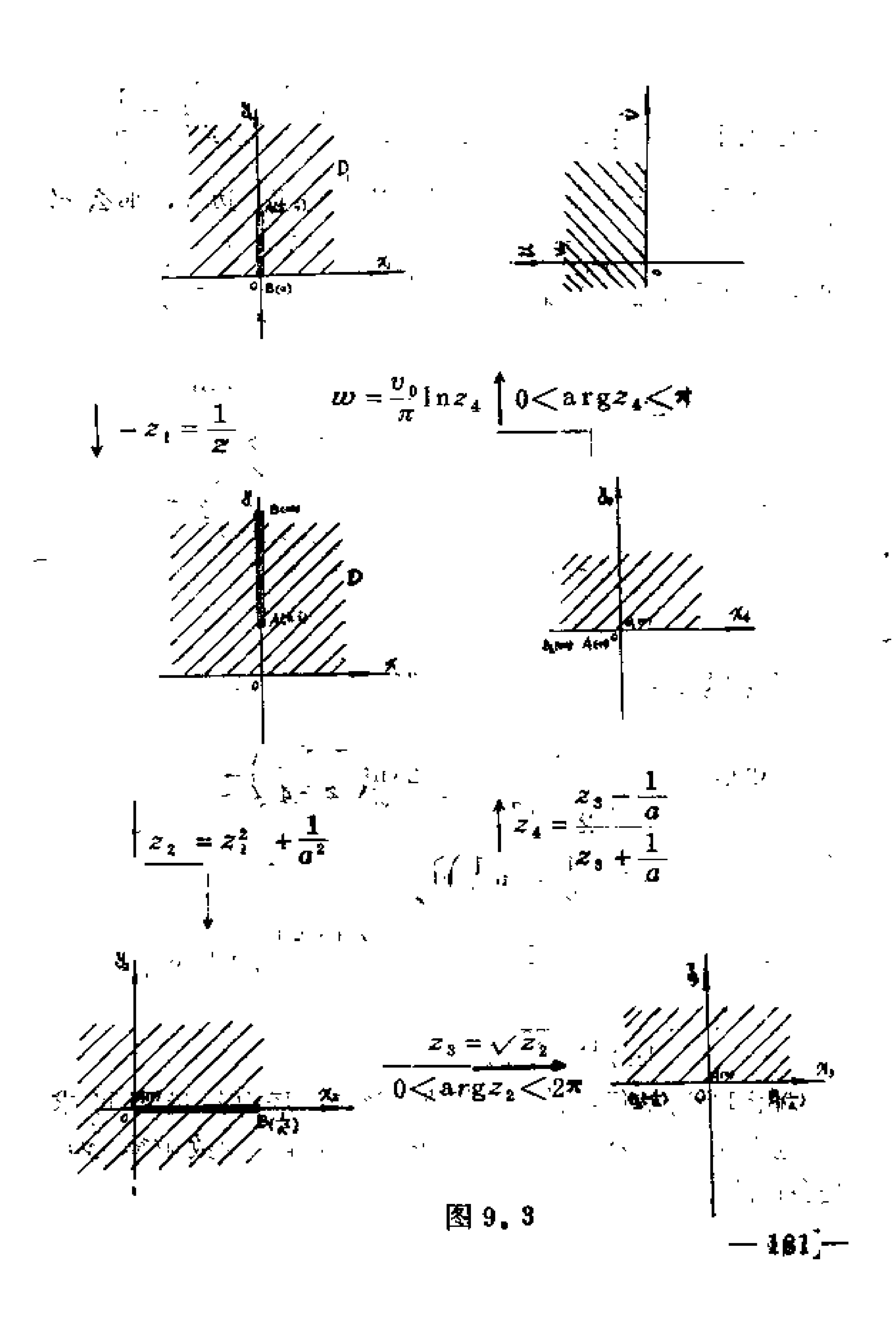
$\therefore w = \frac{V_0}{\pi}\ln\frac{\sqrt{z^2+a^2}-az}{\sqrt{z^2+a^2}+az}$为所求复势，它是区域 D 内单值函数，用它可求出静电场中的各量。

6. 试求垂直于z平面且与z平面交于圆$|z|=1$ 及 $|z-1| = \frac{5}{2}$的两个柱面之间的静电场，设两柱面之间的电势差为1。

解：首先作分式线性映射 $w_1 = \frac{z-z_1}{z-z_2}$，$z_1$，$z_2$是关于 c_1：$|z|=1$ 和 c_2：$|z-1| = \frac{5}{2}$对称的两点。把c_1和c_2映照为w_1平面上的c_1'和c_2'；z_1和 z_2映照为 $w_1=0$，$w_1=\infty$。由于$w_1=0$和$w_1=\infty$是关于c_1'和 c_2' 对称的，故 c_1'、c_2' 为中心在 $w_1=0$ 处的两个同心圆。（图9.4）

由于 c_1，c_2 的中心均在实轴上，所以点 z_1和 z_2 也应该在实轴上，于是可设 $z_1=x_1$，$z_2=x_2$，

$\because x_1$，x_2关于 c_1对称，故有$x_1x_2=1$，又 x_1，x_2 关于 c_2 对称，故也有 $(x_1-1)(x_2-1)=\left(\frac{5}{2}\right)^2$.



D
$w=\frac{v_0}{\pi}\ln z_4$
$0<\arg z_4<\pi$
$z_1=\frac{1}{z}$
D
$z_2=z_1^2+\frac{1}{a^2}$
$z_4=\frac{z_3-\frac{1}{a}}{z_3+\frac{1}{a}}$
$z_3=\sqrt{z_2}$
$0<\arg z_2<2\pi$

图 9.3

解上面两式可得：$x_1=-\frac{1}{4}$，$x_2=-4$，故 $w=\dfrac{z+\frac{1}{4}}{z+4}$

由于实轴上的点映照到实轴，边界映照到边界，那么 c_1' 的半径 $r_1=\dfrac{1+\frac{1}{4}}{1+4}=\dfrac{1}{4}$，$c_2'$的半径 $r_2=\dfrac{\frac{7}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{7}{2}+4}=\dfrac{1}{2}$。

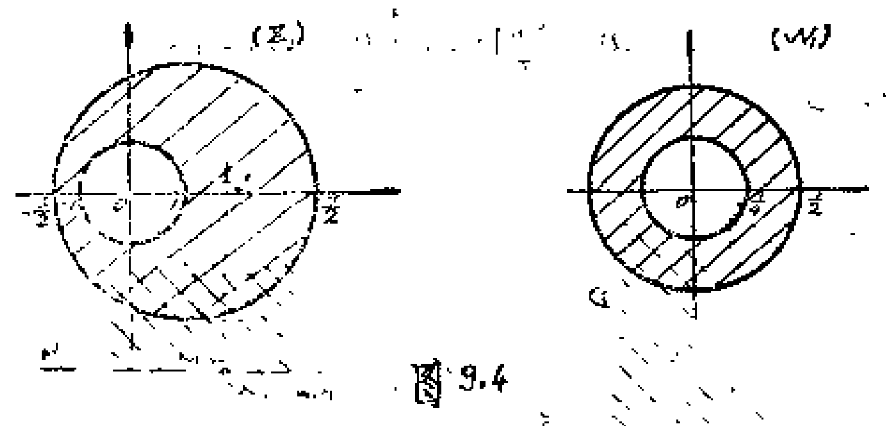


图 9.4

故按§2第四段例1的结果得：

$$\Phi(z)=\frac{\frac{i}{2}}{\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{4}}\left[2\ln\left(\frac{z+\frac{1}{4}}{z+4}\right)-\left(\ln\frac{1}{2}+\ln\frac{1}{4}\right)\right]$$

$$=\frac{i}{2\ln 2}\left[2\ln\frac{1}{4}+2\ln\left(\frac{4z+1}{z+4}\right)+\ln 8\right]$$

$$=\frac{i}{\ln 2}\ln\frac{4z+1}{z+4}$$

此即为所求复势。有了复势，该静电场中各量即可求得。这个函数是多值解析函数，它的实部即力函数$\psi(x,y)$是多值的。